100% LICENCE

1re et 2e années

ÉMILE AMZALLAG - JOSEPH CIPRIANI - JOCELYNE BEN AÏM - NORBERT PICCIOLI

LA PHYSIQUE EN FAC

Électrostatique et Électrocinétique

Cours et exercices corrigés

50% COURS
+50% EXOS
=100% EFFICACE

2e édition

EdiScience

ÉLECTROSTATIQUE et ÉLECTROCINÉTIQUE

50 % COURS, 50 % EXOS

ÉLECTROSTATIQUE et ÉLECTROCINÉTIQUE

Rappel de cours et exercices corrigés de Physique
50 % cours + 50 % exos

Émile Amzallag
Josep Cipriani
Josseline Ben Aïm
Norbert Piccioli
Maîtres de conférences à l'université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

2e édition



Illustration de couverture : *Claude Lieber*

ISBN 2 10 050249 2

Table des matières

1

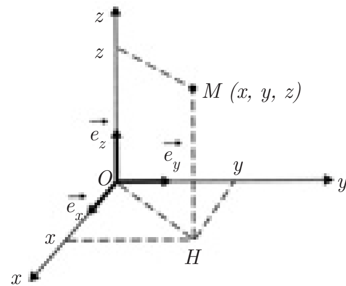
Calcul vectoriel

1.1. REPRÉSENTATION D'UN POINT DANS L'ESPACE

On se placera toujours dans un repère orthonormé $Oxyz$, de vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$.

1.1.1 Coordonnées cartésiennes

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$



Si M se déplace, on a :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\overrightarrow{M} = \mathrm{d}x\vec{e}_x + \mathrm{d}y\vec{e}_y + \mathrm{d}z\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

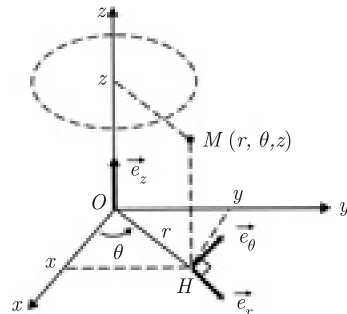
$$(\mathrm{d}\overrightarrow{OM})^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

1.1.2 Coordonnées cylindriques

Vecteurs unitaires : $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$;

On définit M par sa coordonnée z et par les coordonnées polaires r, θ de son projeté sur le plan xOy.

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{OM}^2 = r^2 + z^2$$

$$(\mathrm{d}\overrightarrow{OM})^2 = \mathrm{d}r^2 + (r\,\mathrm{d}\theta)^2 + \mathrm{d}z^2$$

1.1.3 Coordonnées sphériques

Vecteurs unitaires : $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$.

On définit M par la longueur

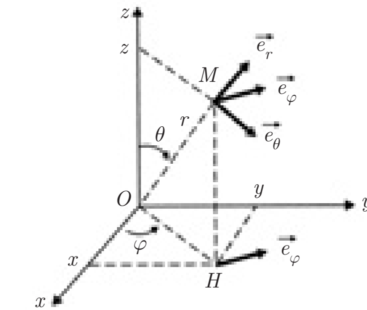
$$r = OM \text{ et les deux angles } \varphi \text{ et } \theta.$$

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r \sin\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \vec{e}_\varphi + r \, \mathrm{d}\theta \, \vec{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{OM}^2 = r^2$$

$$(\mathrm{d}\overrightarrow{OM})^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2 \sin^2\theta \, \mathrm{d}\varphi^2 + r^2 \, \mathrm{d}\theta^2$$



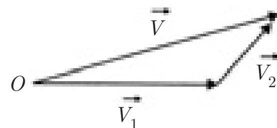


Bien distinguer la coordonnée polaire $r = OM$ et la coordonnée sphérique $r = OM$.

1.2. VECTEURS

Dans cet ouvrage, la norme d'un vecteur $\vec{V}$, habituellement écrite $\|\vec{V}\|$ sera désignée tout simplement par la lettre V pour ne pas surcharger l'écriture, sauf nécessité.

1.2.1 Somme de deux vecteurs



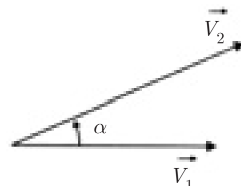
$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

$\vec{V} = X_1\vec{e}_x + Y_1\vec{e}_y + Z_1\vec{e}_z$

$\vec{V}_2 = X_2\vec{e}_x + Y_2\vec{e}_y + Z_2\vec{e}_z$

$\vec{V} = (\vec{X}_1 + \vec{X}_2)\vec{e}_x + (\vec{Y}_1 + \vec{Y}_2)\vec{e}_y + (\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2)\vec{e}_z$

1.2.2 Produit scalaire



$S = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ S est un scalaire

Par définition $S = V_1\ V_2 \cos\alpha$

où l'angle α est défini par $\alpha = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.



- Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est nul.
- Pour les vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ on a :

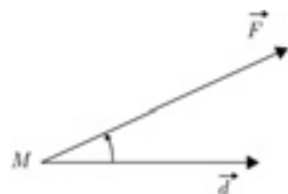
$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

Expression cartésienne du produit scalaire

$$S = (X_1\vec{e}_x + Y_1\vec{e}_y + Z_1\vec{e}_z) \cdot (X_2\vec{e}_x + Y_2\vec{e}_y + Z_2\vec{e}_z) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

Exemple 1. Travail d'une force

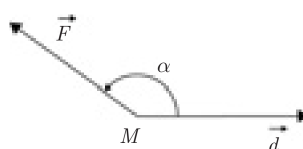


Si $\vec{F}$ est la force et $\vec{d}$ le déplacement,

on a : $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F\,d\cos\alpha$

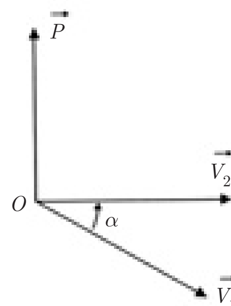
Si $\vec{F} \perp \vec{d}$, le travail est nul.

Si $\alpha = (\vec{d}, \vec{F})$ est aigu, le travail est positif, il s'agit d'un travail moteur.



Si α est obtus, le travail est négatif, il s'agit d'un travail résistant.

1.2.3 Produit vectoriel



$\vec{P} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

Par définition, $\vec{P}$ est un vecteur

– perpendiculaire au plan $(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$,

– orienté de telle sorte que le trièdre $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{P}$ soit direct,

– de norme $V_1 V_2 \, |\sin \alpha|$
où $\alpha = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$.



• Le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est nul.

• Pour les vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, on a :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\left\|\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y\right\| = \left\|\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z\right\| = \|\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x\| = 1$$

Expression cartésienne du produit vectoriel :

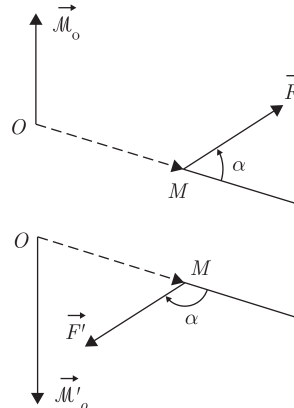
$$\begin{aligned}\vec{P} &= (X_1\vec{e}_x + Y_1\vec{e}_y + Z_1\vec{e}_z) \wedge (X_2\vec{e}_x + Y_2\vec{e}_y + Z_2\vec{e}_z) \\ &= (Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1)\vec{e}_x + (X_2 Z_1 - X_1 Z_2)\vec{e}_y + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)\vec{e}_z\end{aligned}$$

Exemple 2. Moment d'une force par rapport à un point O

On écrit :

$$\mathscr{M}_{\boldsymbol{O}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{F}}$$

Le produit vectoriel $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{F}}$ est toujours orienté de telle sorte que le trièdre $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}, \overrightarrow{\boldsymbol{F}}, \mathscr{M}_{\boldsymbol{O}}$ soit direct.



1.2.4 Vecteurs polaires et vecteurs axiaux

Un vecteur polaire est indépendant du sens positif ou négatif de l'axe qui constitue son support.
Par exemple, une force est un vecteur polaire (on dit aussi « vecteur vrai ») : le choix d'un sens pour son support ne modifie en rien sa direction, ni son sens.

Un vecteur axial (on dit aussi « pseudo-vecteur ») se distingue du vecteur polaire dans la mesure où, une fois que sa direction et sa norme sont fixés, c'est le sens de rotation autour de son axe-support qui finit de le déterminer.

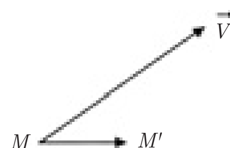
Cela correspond au choix du trièdre direct pour exprimer le produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$. Il arrive d'ailleurs qu'un vecteur axial soit représenté avec une flèche $\curvearrowright$ (par exemple $\breve{\mathscr{M}}$).

1.3. CIRCULATION D'UN VECTEUR

Soit un champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ et un déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\mathrm{d}M}$, noté aussi $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$.

■ Circulation élémentaire

$$\boxed{\mathrm{d}\,\mathscr{C} = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}} \qquad \text{(scalaire)} \qquad (1.1)$$



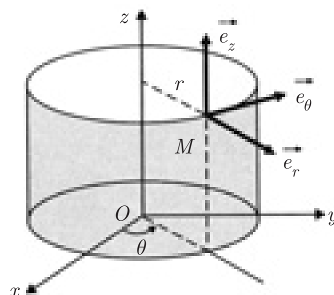
Coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}x\, \vec{e}_x + \mathrm{d}y\, \vec{e}_y + \mathrm{d}z\, \vec{e}_z$$

$$\mathrm{d}\,\mathscr{C} = V_x\, \mathrm{d}x + V_y\, \mathrm{d}y + V_z\, \mathrm{d}z$$

Coordonnées cylindriques :

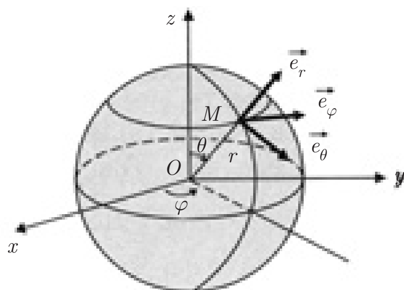


$$\vec{V} = V_r\, \vec{e}_r + V_\theta\, \vec{e}_\theta + V_z\, \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}r\, \vec{e}_r + r\, \mathrm{d}\theta\, \vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\, \vec{e}_z$$

$$\mathrm{d}\,\mathscr{C} = V_r\, \mathrm{d}r + V_\theta r\, \mathrm{d}\theta + V_z\, \mathrm{d}z$$

Coordonnées sphériques :



$$\vec{V} = V_r\, \vec{e}_r + V_\theta\, \vec{e}_\theta + V_\varphi\, \vec{e}_\varphi$$

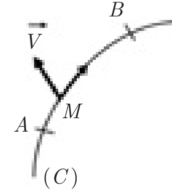
$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}r\, \vec{e}_r + r\, \mathrm{d}\theta\, \vec{e}_\theta + r \sin\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \vec{e}_\varphi$$

$$\mathrm{d}\,\mathscr{C} = V_r\, \mathrm{d}r + V_\theta r\, \mathrm{d}\theta + V_\varphi r \sin\theta\, \mathrm{d}\varphi$$

■ Circulation sur un chemin

On considère un trajet AB sur une courbe (C). Il convient de fixer le sens de parcours sur la courbe (C).

$$\mathscr{C}_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \mathrm{d}\mathscr{C} = \int_{\widehat{AB}} \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{M} \qquad (1.2)$$



Si le chemin est fermé :

$$\mathscr{C} = \oint \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{M} \qquad (1.3)$$

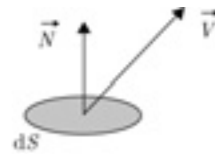
Par exemple, si le champ de vecteurs est un champ de forces, la circulation n'est autre que le travail.

1.4. FLUX D'UN VECTEUR

Soit un champ de vecteurs $\vec{V}(M)$ et une surface élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$.

■ Flux élémentaire

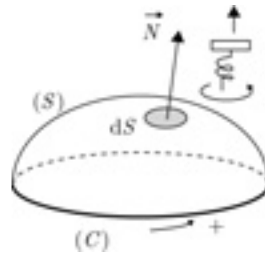
$$\boxed{\mathrm{d}\Phi = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \vec{V} \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}S} \qquad (1.4)$$



où $\vec{N}$ est le vecteur unitaire normal à la surface dS, qu'il convient de bien orienter, en tenant compte des conventions qui vont être précisées.

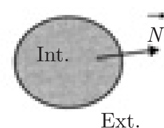
■ Flux à travers une surface ouverte

Soit (C) le contour sur lequel s'appuie la surface (S).
Une fois (C) orienté, le sens du vecteur unitaire $\vec{N}$ est défini par la règle du tire-bouchon (sens dans lequel avance le tire-bouchon quand on le tourne dans le sens positif choisi sur (C)).
On a alors :



$$\Phi = \iint_S \mathrm{d}\Phi = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}S \qquad (1.5)$$

Si la surface est fermée, on ne peut pas définir le contour (C). Par convention $\vec{N}$ est orienté de l'intérieur vers l'extérieur.



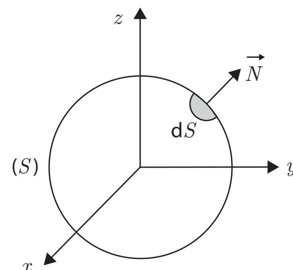
Exemple 3. Champ à symétrie sphérique

Calculer le flux du vecteur $V(M) = f(r)\vec{e}_r$ à travers une sphère de centre O et de rayon r.

On a tout simplement :

$$\Phi = \oiint_S \vec{V} \cdot \vec{N}\, \mathrm{d}S = \oiint_S f(r)\, \mathrm{d}S$$
$$= 4\pi r^2 f(r)$$

car $f(r)$ est constant quand on se déplace sur la sphère.

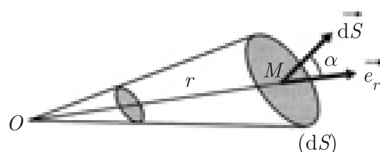


1.5. ANGLE SOLIDE

■ Angle solide élémentaire

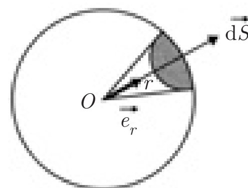
Par définition l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ sous lequel on voit une surface élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ à partir d'un point donné O est :

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}S} \cdot \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mathrm{d}S \cos\alpha}{r^2} \qquad (1.6)$$



Dans le cas où l'élément $\mathrm{d}S$ est pris sur la sphère de centre O et de rayon r, on a tout simplement :

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{r^2}\vec{N} \cdot \vec{e}_r = \frac{\mathrm{d}S}{r^2}$$



Exemple 4.

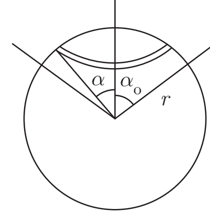
- Espace entier : $\Omega = \dfrac{1}{r^2}\oiint_S \mathrm{d}S = \dfrac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$ stérad.
- Demi-espace entier : $\Omega = 2\pi$ stérad.

• Cône de demi-angle au sommet α_0 :

$$\begin{aligned} dS &= 2\pi r \sin\alpha \, r \, d\alpha \\ &= 2\pi r^2 \sin\alpha \, d\alpha \end{aligned}$$

$$\Omega = \iint_S \frac{dS}{r^2} = \int_0^{\alpha_0} 2\pi \sin\alpha \, d\alpha$$

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha_0)$$



1.6. OPÉRATEURS VECTORIELS

1.6.1 Gradient

L'opérateur $\overrightarrow{\text{grad}}$ (ou encore $\vec{\nabla}$, opérateur vectoriel polaire nabla) associe à une fonction scalaire $f(x, y, z)$ un vecteur de composantes $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$.

Comme :
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

on en déduit

$$\boxed{df = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\ f\right) \cdot \overrightarrow{dM}} \qquad (1.7)$$

relation que l'on utilise pour définir le gradient dans un système de coordonnées quelconques.

Coordonnées cartésiennes : $f = f(x, y, z)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Coordonnées cylindriques : $f = f(r, \theta, z)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}\ f &= (\overrightarrow{\text{grad}}\ f)_r\, \vec{e}_r + (\overrightarrow{\text{grad}}\ f)_\theta\, \vec{e}_\theta + (\overrightarrow{\text{grad}}\ f)_z\, \vec{e}_z \\ \overrightarrow{dM} &= dr\, \vec{e}_r + r\, d\theta\, \vec{e}_\theta + dz\, \vec{e}_z \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathrm{d}f = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\ f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}\right) = (\text{grad}\ f)_r\ \mathrm{d}r + (\text{grad}\ f)_\theta r\ \mathrm{d}\theta + (\text{grad}\ f)_z\ \mathrm{dz}$$

Or $$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{dz}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{r\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_z \end{matrix}$$

Coordonnées sphériques : $f = f(r, \theta, \varphi)$

Un calcul analogue au précédent donne :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{\partial f}{r\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r \sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{matrix}$$

Propriétés :

Les surfaces de niveau sont définies par

$$f(x, y, z) = \text{cte}.$$

Direction du gradient :

Soit une surface de niveau $f(x, y, z) = \lambda$.
Pour un point M se déplaçant sur cette surface, on a :

$$\mathrm{d}f = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\ f\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = 0$$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\ f$ est donc normal à la surface de niveau.

Sens du gradient :

Soit deux points M_1, M_2 sur deux surfaces de niveau voisines $f = \lambda_1$ et $f = \lambda_2 > \lambda_1$.

On a $$\mathrm{d}f = \lambda_2 - \lambda_1 = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} > 0$$



Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ est orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

Circulation d'un gradient :

$$\mathscr{C}_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = \int_{f(A)}^{f(B)} \mathrm{d}f$$

$$\boxed{\int_{\widehat{AB}} \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = f(B) - f(A)} \qquad (1.8)$$

Elle est égale à la variation de la fonction f et ne dépend pas du chemin parcouru.

Cette relation facilite parfois le calcul de la circulation d'un vecteur le long du chemin. Encore faut-il que ce vecteur soit un gradient. On montre que, pour qu'un vecteur $\vec{V}$ soit un champ de gradient, il faut et il suffit que les dérivées partielles croisées de ses composantes soient égales deux à deux, soit :

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial z} \quad \text{(voir exercices)}$$

Dans le cas particulier d'un parcours fermé, on a :

$$\boxed{\mathscr{C}_{AA} = \oint \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = 0} \qquad (1.9)$$

1.6.2 Divergence

L'opérateur div (ou encore $\vec{\nabla}\cdot$) associe à un vecteur $\vec{V}$ le produit scalaire de $\vec{\nabla}$ par ce vecteur

$$\text{div}\, \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \quad \text{(scalaire)}$$

Coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Coordonnées cylindriques :

On montre que div $\vec{V}$ peut se mettre sous la forme condensée suivante :

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right] + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Coordonnées sphériques :

Une expression simplifiée de div $\vec{V}$ est donnée par :

$$\mathrm{div}\,\vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial(V_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}$$

Divergence et flux d'un vecteur :

Par définition, la différentielle du flux de $\vec{V}$ à travers une surface fermée (S) est reliée à la divergence de $\vec{V}$ par :

$$\boxed{\mathrm{d}\Phi = \mathrm{div}\vec{V}\,\mathrm{d}\tau} \qquad (1.10)$$

où dτ représente un volume élémentaire : la divergence d'un champ vectoriel représente le flux de ce vecteur sortant de l'unité de volume.

On en déduit :

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{(\tau)} \mathrm{div}\,\vec{V}\,\mathrm{d}\tau$$

Cette formule, dite de Green-Ostrogradsky (voir paragraphe **1.8**) facilite parfois le calcul du flux d'un vecteur à travers une surface fermée.

1.6.3 Rotationnel

L'opérateur $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ (ou encore $\vec{\nabla}\wedge$) associe à un vecteur $\vec{V}$ le produit vectoriel de $\vec{\nabla}$ par ce vecteur :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V}$$

Coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V} = \begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_x \\ \\ \vec{e}_y \\ \\ \vec{e}_z \end{matrix}$$

Coordonnées cylindriques :

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V})_r = \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z}$$

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V})_\theta = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}$$

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V})_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]$$

Coordonnées sphériques :

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V})_r = \frac{1}{r \sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}\right]$$

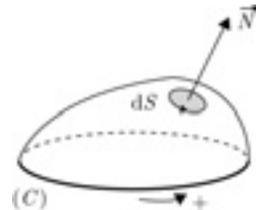
$$(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V})_\theta = \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r}$$

$$(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{V})_\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]$$

Rotationnel et circulation d'un vecteur :

Par définition, la différentielle de la circulation de $\vec{V}$ sur un contour fermé (C) est relié au rotationnel de $\vec{V}$ par :

$$\boxed{\mathrm{d}\,\mathscr{C} = \left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}} \qquad (1.11)$$



où dS est un élément d'une surface quelconque (S) qui s'appuie sur (C).

Cette relation permet de définir la coordonnée du rotationnel dans une direction quelconque de vecteur unitaire $\vec{n}$.
On en déduit :

$$\mathscr{C} = \oint_{(C)} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = \iint_{(S)} \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Cette formule, dite de Stokes (voir paragraphe **1.8**), facilite parfois le calcul de la circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé.

1.6.4 Laplacien

L'opérateur Laplacien (noté Δ) est défini par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Il peut s'appliquer à une fonction scalaire :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ou à un vecteur :

$$\Delta \vec{V} = \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2}$$
$$= \vec{e}_x \Delta V_x + \vec{e}_y \Delta V_y + \vec{e}_z \Delta V_z$$

L'intérêt de tous ces opérateurs vectoriels est d'une part, de permettre une écriture concise des équations dites « locales » (exemple : équations de Maxwell), et d'autre part, de faciliter les calculs, grâce aux relations vectorielles qui existent entre eux, et aux transformations intégrales qu'ils permettent d'effectuer.



1.7. RELATIONS VECTORIELLES

Produit mixte : $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A})$ (1.12)

Double produit vectoriel : $\vec{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ (1.13)

f et p étant des fonctions scalaires, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fp) = f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,p + p\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f \tag{1.14}$$

$$\text{div}(f\vec{A}) = (\overrightarrow{\text{grad}}\,f)\cdot\vec{A} + f\,\text{div}\,\vec{A} \tag{1.15}$$

$$\text{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} \tag{1.16}$$

$$\text{rot}(f\vec{A}) = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,f\right)\wedge\vec{A} + f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} \tag{1.17}$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\,f) = \Delta f \tag{1.18}$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = 0 \tag{1.19}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\,f) = \vec{0} \tag{1.20}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A} \tag{1.21}$$

1.8. TRANSFORMATIONS INTÉGRALES

Théorème de Stokes (ou du rotationnel) :

$$\boxed{\oint_C \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{d}\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{d}S}\ [(S)\text{ s'appuie sur }(C)]} \tag{1.22}$$

Théorème de Green-Ostrogradsky (ou de la divergence) :

$$\boxed{\oiint_{S\text{ fermée}} \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{d}S} = \iiint_{(\tau)} \text{div}\vec{A}\cdot\text{d}\tau} \tag{1.23}$$

[(τ) volume englobé par (S)]

Formule du gradient :

$$\iiint_{(\tau)} \overrightarrow{\text{grad}}\, f \, \mathrm{d}\tau = \oiint_{(S)} f\, \overrightarrow{\mathrm{d}S} \tag{1.24}$$

Formule du rotationnel :

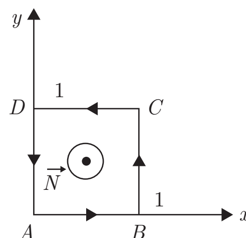
$$\iiint_{(\tau)} \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}\, \mathrm{d}\tau = \oiint_{(S)} \overrightarrow{\mathrm{d}S} \wedge \vec{A} \tag{1.25}$$

Exemple 5.

On considère le champ vectoriel

$$\vec{V} = (ax + by)\vec{e}_x + (cx + fy)\vec{e}_y$$

et le contour fermé $ABCDA$ précisé sur la figure. Vérifier le théorème de Stokes en calculant la circulation de $\vec{V}$ sur ce contour.



On a d'une part :

$$\mathscr{C} = \oint_C \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_0^1 ax\mathrm{d}x + \int_0^1 (c + fy)\mathrm{d}y + \int_1^0 (ax + b)\mathrm{d}x + \int_1^0 fy\mathrm{d}y = c - b$$

et d'autre part :

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \cdot \vec{N}\, \mathrm{d}S$$

et comme :

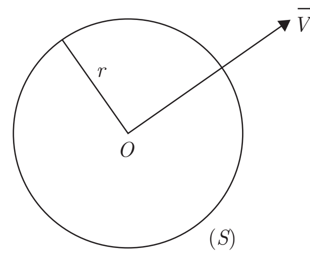
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = (c - b)\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{N} = \vec{e}_z$$

il vient :

$$\iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \int_0^1 \int_0^1 (c - b)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c - b$$

Exemple 6.

On considère le champ vectoriel à symétrie sphérique : $\vec{V} = a\vec{r}$ et la sphère de rayon r centrée en O. Vérifier le théorème d'Ostrogradsky en calculant le flux de $\vec{V}$ à travers la surface de la sphère.



On a d'une part

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = ar \iint_{(S)} \vec{e}_r \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}S$$
$$= arS = 4\pi ar^3$$

D'autre part :

$$\mathrm{div}\vec{V} = \frac{2}{r}V_r + \frac{\partial V_r}{\partial r} = 2a + a = 3a$$

On en déduit :

$$\iiint_{(\tau)} \mathrm{div}\,\vec{V}\,\mathrm{d}\tau = 3a \iiint_{(\tau)} \mathrm{d}\tau = 3a\frac{4}{3}\pi r^3$$
$$= 4\pi ar^3$$

EXERCICES

1.1. On considère le champ vectoriel :

$$\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{e}_x - 14yz\vec{e}_y + 20xz^2\vec{e}_z$$

Calculer la circulation de $\vec{A}$ entre les points $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$ le long des chemins suivants :

a) le segment de droite joignant ces deux points,

b) les segments de droite allant de $(0, 0, 0)$ à $(1, 0, 0)$ puis de $(1, 0, 0)$ à $(1, 1, 0)$ et enfin de $(1, 1, 0)$ jusqu'à $(1, 1, 1)$.

Ce champ vectoriel est-il un gradient ?

1.2. Soit le champ vectoriel :

$$\vec{V}(M) = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \qquad \text{avec} \qquad \overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long de :

a) la spirale logarithmique d'équation polaire :

$$r = ae^{k\theta}, \qquad \text{entre} \qquad \theta_1 \ \text{ et } \ \theta_2$$

b) la cardioïde :

$$r = a(1 + \cos\theta), \qquad \text{entre} \qquad 0 \ \text{ et } \ \pi.$$

1.3. On considère le champ vectoriel :

$$\vec{V} = (2x - y)\vec{e}_x + (2y - x)\vec{e}_y - 4z\vec{e}_z$$

Montrer que ce champ est un gradient, et déterminer la fonction scalaire φ dont il dérive par la relation $\quad \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$.

1.4. Un champ de vecteur $\vec{E}$, dans l'espace orthonormé $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, est caractérisé par ses composantes :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ f(x,y) \end{pmatrix} \qquad \text{où } f \text{ ne dépend que de } x \text{ et } y.$$

1) Déterminer la fonction f pour que le champ $\vec{E}$ dérive d'un potentiel V tel que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

2) Déterminer alors le potentiel de V.

3) Quelle est la circulation du champ $\vec{E}$ entre les points $A(0, 0, 0)$ et $B(1, 1, 1)$?

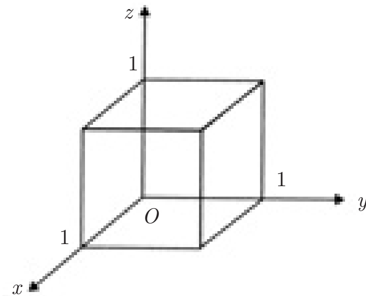
1.5. *1)* On considère le champ vectoriel à symétrie sphérique : $\vec{V} = \dfrac{\vec{e}_r}{r^2}$. Montrer que ce champ dérive de la fonction scalaire $f = -\dfrac{1}{r}$ par la relation $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(r)$.

2) Calculer $\text{div}\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}\right)$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}\right)$.

1.6. Calculer le flux du champ de vecteurs :

$$\vec{V}(M) = 4xz\vec{e}_x - y^2\vec{e}_y + yz\vec{e}_z$$

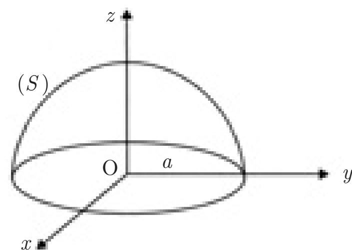
à travers la surface du cube limité par $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$.



1.7. Calculer le flux du champ vectoriel :

$$\vec{V}(M) = xz^2\vec{e}_x + (x^2y - z^3)\vec{e}_z + (2xy + y^2z)\vec{e}_z$$

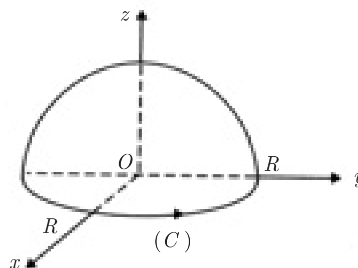
à travers la surface totale de l'hémisphère S limité par $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ et $z = 0$.



1.8. Soit le champ vectoriel :

$$\vec{V} = 2z\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2xy\vec{e}_z$$

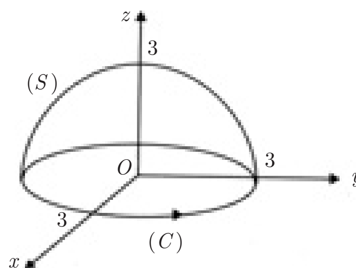
1) Montrer que le flux de $\vec{V}$ sortant à travers l'hémisphère de centre O et de rayon R est le même que le flux rentrant à travers la base constituée par le disque de centre O et de rayon R du plan xOy.



2) En déduire le flux sortant à travers l'hémisphère.

1.9. Déterminer le flux du champ de vecteurs $\vec{V} = K\dfrac{\vec{r}}{r^3}(\vec{r} = \overrightarrow{OM})$ à travers une surface fermée contenant l'origine O. Même question pour une surface fermée ne contenant pas le point O.

1.10. Vérifier le théorème de Stokes pour le champ de vecteurs $\vec{V} = 2y\vec{e}_x + 3x\vec{e}_y - z^2\vec{e}_z$, dans le cas où S est la surface de l'hémisphère supérieur d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, et (C) le contour sur lequel s'appuie cet hémisphère.



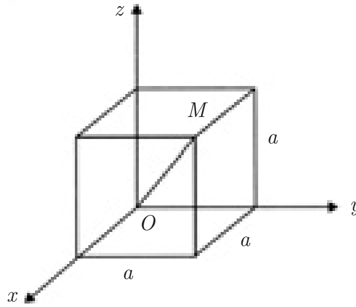
CORRIGÉS

1.1. $$\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{e}_x - 14yz\vec{e}_y + 20xy^2\vec{e}_z$$

a) Sur le segment de droite joignant $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$, on a : $x = y = z$. On peut donc écrire :

$$\mathscr{C} = \int_{(C_1)} \vec{A} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_0^1 (3x^2 + 6x)\mathrm{d}x - \int_0^1 14x^2\mathrm{d}x + \int_0^1 20x^3\mathrm{d}x$$

$$= \left[x^3 + 3x^2 - \frac{14}{3}x^3 + 5x^4\right]_0^1 = \frac{13}{3}$$



b) De $(0, 0, 0)$ à $(1, 0, 0)$: $y = 0 \quad z = 0$

$dy = 0 \quad dz = 0$

$$\mathscr{C}_1 = \int_0^1 3x^2 dx = 1$$

de $(1, 0, 0)$ à $(1, 1, 0)$: $x = 1 \quad z = 0$

$dx = 0 \quad dz = 0$

$$\mathscr{C}_2 = 0$$

de $(1, 1, 0)$ à $(1, 1, 1)$: $x = 1 \quad y = 1 \quad dx = 0 \quad dy = 0$

$$\mathscr{C}_3 = \int_0^1 20z^2 dz = \frac{20}{3}$$

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 + \mathscr{C}_2 + \mathscr{C}_3 = 1 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

Comme la circulation entre les deux points $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$ dépend du chemin suivi, $\vec{A}$ n'est pas un gradient.

1.2. On a : $$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$$

a) Le long de la spirale logarithmique $r = ae^{k\theta}$, on a :

$$\begin{aligned} d\mathscr{C} &= \vec{V} \cdot \overrightarrow{dM} = \vec{e}_r \cdot (dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta) \\ &= dr = ak\,e^{k\theta} d\theta \end{aligned}$$

$$\mathscr{C} = ak\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{k\theta}\mathrm{d}\theta = [ae^{k\theta}]_{\theta_1}^{\theta_2}$$
$$= a(e^{k\theta_2} - e^{k\theta_1})$$

b) Le long de la cardioïde $r = a(1 + \cos\theta)$, on a :

$$\mathrm{d}\mathscr{C} = \vec{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}r = -a\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$\mathscr{C} = \int_0^{\pi} -a\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = [a\cos\theta]_0^{\pi}$$
$$= -2a$$

1.3. Pour montrer que $\vec{V}$ est un gradient, il suffit de vérifier que les dérivées croisées de ses composantes sont égales deux à deux.

On a :

$$\vec{V} = (2x - y)\vec{e}_x + (2y - x)\vec{e}_y - 4z\vec{e}_z$$
$$V_x = 2x - y \qquad V_y = 2y - x \qquad V_z = -4z$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial V_x}{\partial y} = -1 & \dfrac{\partial V_y}{\partial x} = -1 \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial z} = 0 & \dfrac{\partial V_z}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial V_z}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial V_x}{\partial z} = 0 \end{array}\right\} \quad \vec{V} \text{ est bien un champ de gradient.}$$

• Détermination de la fonction φ.

On a : $$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

et aussi : $$\mathrm{d}\varphi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \vec{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}M}$$

On a donc :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x - y \quad\Longrightarrow\quad \varphi = x^2 - yx + f(y,z)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -x + \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x \quad\Longrightarrow\quad f = y^2 + g(z)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial z} - 4z \quad\Longrightarrow\quad g = -2z^2 + C$$

où C est une constante arbitraire.

On en déduit finalement :

$$\varphi = x^2 - yx + y^2 - 2z^2 + C$$

1.4. Le champ $\vec{E}$ est défini par :

$$\vec{E} = yz\vec{e}_x + zx\vec{e}_y + f(x,y)\vec{e}_z$$

1) Pour que $\vec{E}$ soit un gradient, il faut que les dérivées croisées de ses composantes soient égales deux à deux, soit :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad z = z \text{ qui est vérifié identiquement}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad &\Longrightarrow \quad x = \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = y \end{aligned}\right\} \text{conditions nécessaires}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \quad \Longrightarrow \quad f = xy + g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = y \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = 0 \Longrightarrow g = C$$

La fonction f doit donc être de la forme :

$$f = xy + C$$

2) Pour déterminer le potentiel V, on écrit que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$. D'où :

$$E_x = yz = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad V = -xyz + u(y,z)$$

$$E_y = xz = -\frac{\partial V}{\partial y} = xz - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \Longrightarrow \quad u = v(z)$$

$$E_z = xy + C = -\frac{\partial V}{\partial x} = xy - \frac{\partial u}{\partial z} \quad \Longrightarrow \quad v = -Cz + \text{cte}$$

On en déduit :

$$V = -xyz - Cz + \text{cte}$$

3) Circulation entre les points $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$

$$\mathscr{C} = \int_{\widehat{AB}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = -\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} = -\int_{V(A)}^{V(B)} \mathrm{d}V$$

$$\mathscr{C} = V(0,0,0) - V(1,1,1) = 1 + C$$

1.5. *1)* Soit $\vec{V} = \dfrac{\vec{e}_r}{r^2}$ à symétrie sphérique :

On a :

$$\frac{\vec{e}_r}{r^2} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r^2} \Longrightarrow f(r) = -\frac{1}{r} + \mathrm{cte}$$

2) Calcul de div $\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}\right)$.

On a :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$r\ \mathrm{d}r = r\ \mathrm{d}x + y\ \mathrm{d}y + z\ \mathrm{d}z$$

$$\vec{V} = \frac{\vec{e}_r}{r^2} = \begin{pmatrix} V_x = \dfrac{x}{r^3} \\ V_y = \dfrac{y}{r^3} \\ V_z = \dfrac{z}{r^3} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r} \\ \dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r} \end{matrix}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{1}{r^3} + x\left(-\frac{3}{r^4}\frac{x}{r}\right) = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \qquad \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{r^2 + 3z^2}{r^5}$$

$$\mathrm{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right) = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0$$

sauf pour $r = 0$ où $\vec{V}$ n'est pas défini.

• Calcul de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}\right)$:

On peut faire un calcul direct, en utilisant la définition de l'opérateur $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$.

Il est plus simple de remarquer que, $\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}$ étant égal à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f$, on peut appliquer la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f) = \vec{0}$$

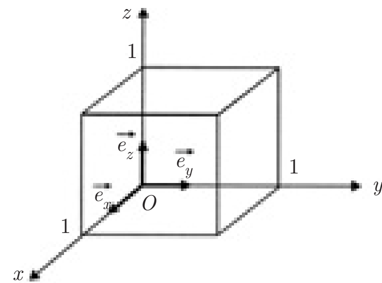
Par conséquent, $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}\right) = \vec{0}$

sauf pour $r = 0$ où $\vec{V}$ n'est pas défini.

1.6. $\vec{V}(M) = 4xz\vec{e}_x - y^2\vec{e}_y + yz\vec{e}_z$

a) Face $x = 1 : \mathrm{d}S = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \vec{n} = \vec{e}_x$

$$\Phi_1 = \int_0^1 4z\,\mathrm{d}z \int_0^1 \mathrm{d}y = 2$$



b) Face $x = 0 : \mathrm{d}S = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \vec{n} = -\vec{e}_x$

$$\Phi_2 = 0$$

c) Face $y = 1 : \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \quad \vec{N} = \vec{e}_y$

$$\Phi_3 = -\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}z = -1$$

d) Face $y = 0 : \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \quad \vec{N} = -\vec{e}_y \quad \Longrightarrow \quad \Phi_4 = 0$

e) Face $z = 0 : \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \vec{N} = -\vec{e}_z \quad \Longrightarrow \quad \Phi_5 = 0$

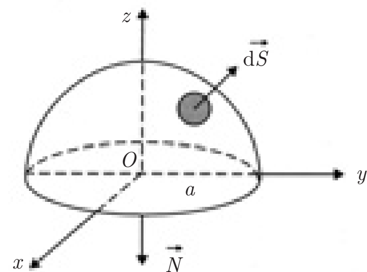
f) Face $z = 1 : \mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \vec{N} = \vec{e}_z$

$$\Phi_6 = \int_0^1 y\,\mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

$$\Phi_{\text{total}} = 2 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

1.7. La surface totale est constituée par la surface de l'hémisphère plus la surface de la base (surface fermée).

On peut calculer le flux directement, mais il est plus commode d'utiliser le théorème de la divergence.



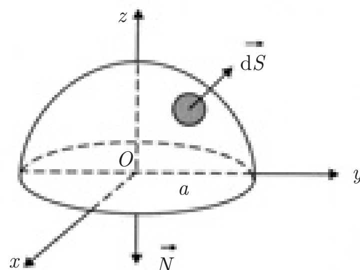
$$\vec{V} = xz^2\vec{e}_x + (x^2y - z^3)\vec{e}_y + (2xy + y^2z)\vec{e}_z$$

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{(\tau)} \operatorname{div} \vec{V}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = z^2 + x^2 + y^2 = r^2 \qquad \mathrm{d}\tau = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

D'où :
$$\Phi = \iiint_\tau r^4 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^a r^4\,\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{a^5}{5} \times 1 \times 2\pi = \frac{2\pi a^5}{5}$$

1.8. *1)* $V = 2z\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2xy\vec{e}_z$



$$\mathrm{div}\,\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$$

Soit S la surface totale de la demi-sphère (hémisphère + base) et τ le volume de cette demi-sphère.

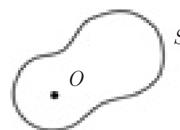
Le théorème de la divergence permet d'écrire :
$$\Phi_S = \oiint_{(S)} \vec{V}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}S = \iiint_{(\tau)} \mathrm{div}\,\vec{V}\,\mathrm{d}\tau = 0$$
$$\underset{\text{hémisphère}}{\Phi\ (\text{sortant})} + \underset{\text{disque}}{\Phi\ (\text{sortant})} = 0 \implies \underset{\text{hémisphère}}{\Phi\ (\text{sortant})} = \underset{\text{disque}}{\Phi\ (\text{rentrant})} = 0$$

2) On en déduit :
$$\underset{\text{hémisphère}}{\Phi\ (\text{sortant})} = \iint_{\text{disque}} 2xy\,\mathrm{d}S \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$$
$$\Phi = \iint_{\text{disque}} 2r^3 \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$
$$= 2\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = 0$$

1.9. $$\vec{V} = K\frac{\vec{r}}{r^3} = K\frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

a) Si la surface fermée contient l'origine, on ne peut pas appliquer le théorème de Green-Ostrogradsky car div $\vec{V}$ n'est pas définie en O. Il faut faire un calcul direct :

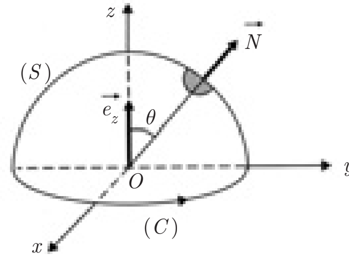
$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{V}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}S = K\iint_{(S)} \frac{\mathrm{d}S}{r^2}\vec{N}\cdot\vec{e}_r$$
$$= K\int_{(S)} \mathrm{d}\Omega = 4\pi k$$



b) Si la surface ne contientpas le point O, on a :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{V} \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}S = \iiint_{(\tau)} \operatorname{div} \vec{V}\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad \text{puisque} \quad \operatorname{div}\frac{\vec{e}_r}{r^2} = 0$$

1.10. Théorème de Stokes :



$$\mathscr{C} = \int_{(C)} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}}\, S$$
$$= \vec{V} = 2y\vec{e}_x + 3x\vec{e}_y - z^2\vec{e}_z$$

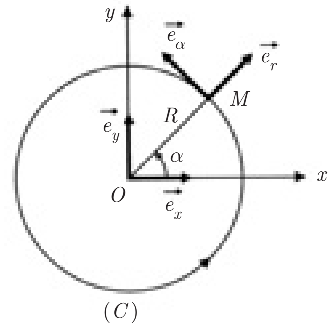
a) **Calcul du rotationnel** : on a ici $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = \vec{e}_z$.

$$\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\vec{N} \qquad \mathrm{d}S = R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \quad \vec{N} = \vec{e}_r$$

$$\mathscr{C} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{V} \cdot \vec{N}\mathrm{d}S = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$
$$= \pi R^2 = 9\pi$$

b) **Calcul direct** :

On a : $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = R\,\mathrm{d}\alpha\,\vec{e}_\alpha$ où $\vec{e}_\alpha$ est le vecteur unitaire porté par la tangente à (C).



$$\vec{e}_\alpha = -(\sin\alpha)\vec{e}_x + (\cos\alpha)\vec{e}_y$$

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -2y(\sin\alpha)R\,\mathrm{d}\alpha + 3x(\cos\alpha)R\,\mathrm{d}\alpha$$

avec $\quad x = R\cos\alpha \quad$ et $\quad y = R\sin\alpha$

On en déduit : $\quad \mathscr{C} = \int_C \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$

$$\mathscr{C} = -2R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha + 3R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$
$$= -2\pi R^2 + 3\pi R^2 = \pi R^2 = 9\pi.$$

2

Champ électrostatique dans le vide

2.1. CHARGES ÉLECTRIQUES

Dans tout phénomène physique intervient un « objet » dont la structure confère certaines propriétés à l'espace qui l'entoure. Dans le cas de la gravitation, l'objet est constitué par une masse. En électrostatique, l'objet est une charge, mesurée en coulomb (C) dans le système international.
Il existe deux types de charge électrique ; les charges de même nature se repoussent tandis que celles qui sont de nature différente s'attirent. Les unes sont dites « positives » et sont mesurées par un nombre positif, les autres sont dites « négatives » et sont mesurées par un nombre négatif (cf. paragraphe **2.2**). Toute charge est multiple de la *charge élémentaire* :

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$$

Les atomes sont constitués de particules chargées, à savoir :

– *les électrons :* (e^-) responsables de la conduction électrique dans les métaux

$$\text{charge : } q_e = -e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$$
$$\text{masse : } m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

– *les protons :* (H^+)

$$\text{charge : } q_p = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$$
$$\text{masse : } m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-24}\ \text{kg}$$

ainsi que les ions et les porteurs de charge dans les semi-conducteurs qui peuvent être des électrons ou des « trous » (absence d'électrons).

On distingue :

• **les charges ponctuelles :** supposées sans dimension, ce qui est analogue à l'hypothèse du point matériel en mécanique.

• **les distributions continues de charge :** hypothèse d'une charge macroscopique permettant de définir une charge infinitésimale dq, à laquelle on peut appliquer les formules établies dans le cas d'une charge ponctuelle, avant d'intégrer sur la distribution.

On définit ainsi les densités :

– linéique sur un fil : $\lambda = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\ell}$ $[\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-1}]$

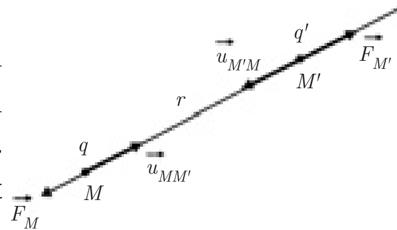
– surfacique (ou surperficielle) sur une surface : $\sigma = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$ $[\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-2}]$

– volumique dans un volume : $\rho = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}$ $[\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-3}]$

auxquelles correspondent respectivement les charges infinitésimales $\lambda\,\mathrm{d}l$, $\sigma\,\mathrm{d}S$ et $\rho\,\mathrm{d}\tau$.

2.2. LOI DE COULOMB

Soit deux charges q et q' placées en M et M' et distantes de r. Ces charges peuvent être positives ou négatives, mais dans le cas de la figure, nous supposerons qu'elles sont de même signe.



La loi de Coulomb permet de déterminer la force $\vec{F}_{M'}$ exercée par q sur q', ou encore la force $\vec{F}_M$ exercée par q' sur q, ces deux forces étant égales et opposées, conformément au principe de l'action et la réaction.

Cette loi s'écrit :

$$\boxed{\vec{F}_{M'} = K\frac{qq'}{r^2}\vec{u}_{MM'}} \qquad (2.1)$$

ou $\vec{F}_M = K\dfrac{qq'}{r^2}\vec{u}_{M'M}$ avec $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ S.I.

$\vec{u}_{MM'}$ est le vecteur unitaire porté par le support de MM', orienté de M vers M', (on dit dans le sens qui va de la cause vers l'effet).



La force est répulsive si les charges sont de même signe, elle est attractive si elles sont de signes contraires.

Cette loi traduit l'interaction entre les deux objets q et q'. Les notions de champ et de potentiel permettent de préciser les propriétés relatives à un seul objet.

2.3. CHAMP ET POTENTIEL

2.3.1 Cas d'une charge ponctuelle

La seule présence d'une charge ponctuelle q au point M (comme d'ailleurs d'une masse ponctuelle m, dans le cas de la gravitation) permet de définir deux propriétés en un point M' de l'espace environnant :

– une propriété vectorielle, le champ électrostatique :

$$\boxed{\vec{E}_M = K\frac{q}{r^2}\vec{u}_{M'M}} \tag{2.2}$$

– une propriété scalaire, le potentiel électrostatique (défini à une constante près) :

$$\boxed{\vec{V}_M = K\frac{q}{r} + \text{cte}} \tag{2.3}$$

– et une relation entre les deux propriétés :

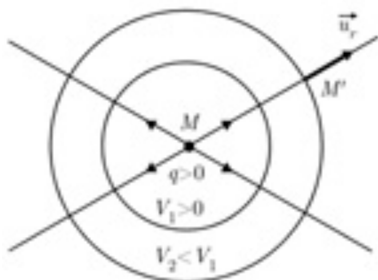
$$\boxed{\vec{E}_M = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_M} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathrm{d}_V = -\vec{E}_M \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}} \tag{2.4}$$

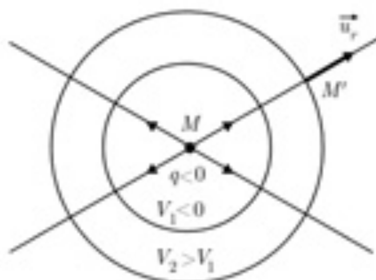
Le champ électrique est orienté vers les potentiels *décroissants* (*cf.* paragraphe **1.6.1**).



2.3.2 Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Les lignes de champ, qui sont les courbes tangentes en chaque point au champ $\vec{E}$, sont ici des droites passant par la charge ponctuelle q placée en M. Ces lignes sont orientées centrifuges ou centripètes suivant que q est respectivement positif ou négatif.





Les surfaces équipotentielles $V = \text{cte}$ sont des sphères centrées en M. En effet, sur ces surfaces, on a :

$$\mathrm{d}V = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,V\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0 \quad \Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \perp \vec{E}$$

2.3.3 Cas d'un système de charges

Lorsque n charges ponctuelles existent simultanément en des points M_1, $M_2, \ldots, M_n$, le principe de superposition permet d'écrire :

– pour le champ résultant en un point M (avec $r_i = M_i M \neq 0$) :

$$\boxed{\vec{E}_M = K \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{M_i M}} \tag{2.5}$$

– et pour le potentiel résultant :

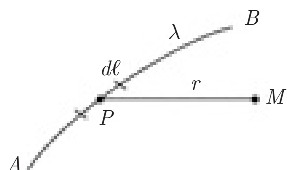
$$\boxed{V_M = K \sum_i \frac{q_i}{r_i}} \tag{2.6}$$

Dans le cas de distributions continues de charges, on aura de même :

– pour un fil chargé uniformément :

$$\vec{E}_M = K \int_{\widehat{AB}} \frac{\lambda\,\mathrm{d}\ell}{r^2} \vec{u}_{PM}$$

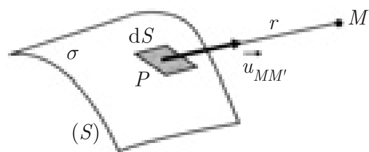
$$V_M = K \int_{\widehat{AB}} \frac{\lambda\,\mathrm{d}\ell}{r}$$



– pour une surface chargée uniformément :

$$\vec{E}_M = K \iint_{(S)} \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{r^2} \vec{u}_{MM'}$$

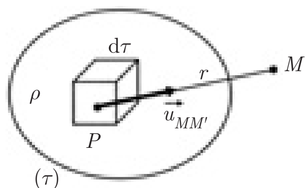
$$V_M = K \iint_{(S)} \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{r}$$



– et pour un volume chargé uniformément :

$$\vec{E}_M = K \iiint_{(S)} \frac{\rho\,\mathrm{d}\tau}{r^2} \vec{u}_{MM'}$$

$$V_M = K \iiint_{(\tau)} \frac{\rho\,\mathrm{d}\tau}{r}$$



2.3.4 Utilisation des symétries

Si, en un point donné M, il passe un plan (M) laissant la distribution des charges invariante par réflexion dans ce plan, alors le champ en M doit être invariant dans cette réflexion : $\vec{E}$ est donc contenu dans le plan de symétrie (M).
Si il passe par M deux plans de symétrie distincts, $\vec{E}$ est donc dirigé suivant la droite d'intersection des deux plans : il suffit donc de calculer la coordonnée de $\vec{E}$ sur cette direction de droite.
Si en M passent trois plans de symétrie formant un trièdre, alors $\vec{E}$ est nul en ce point.

Des considérations de symétrie peuvent dans certains cas particuliers faciliter énormément les calculs des champs et des potentiels résultants.

(Voir exemples d'applications et exercices).

2.4. FORCE ET ÉNERGIE POTENTIELLE ÉLECTROSTATIQUES

De façon générale, la présence d'une charge q en un point M où le champ est $\vec{E}$ se traduit par une interaction caractérisée par deux propriétés :

– une propriété vectorielle, la force exercée sur la charge q (*cf.* en particulier l'expression (2.1) de la loi de Coulomb) :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E}} \tag{2.7}$$

– une propriété scalaire, l'énergie potentielle définie à une constante près comme le potentiel :

$$\boxed{E_\mathrm{p} = qV_M} \tag{2.8}$$

– et une relation entre les deux propriétés :

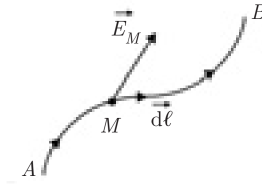
$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_\mathrm{p}} \tag{2.9}$$



- L'interaction entre deux charges est réciproque. On a $\|\vec{F}_M\| = \|\vec{F}_{M'}\|$, ce qui vérifie le principe de l'action et la réaction pour un système isolé.
- L'énergie potentielle E_p définie ci-dessus peut être vue comme :
  – l'énergie de q' dans le champ de q,
  – l'énergie de q dans le champ de q',
  – l'énergie potentielle du système isolé, constituée par les deux charges de q et q'.

Le problème de la généralisation de E_p à un système de n charges $(n > 2)$ sera examiné par la suite (chap. 5.).

2.5. CIRCULATION DU CHAMP ÉLECTRIQUE



Soit un parcours AB orienté de A vers B. La circulation du champ $\vec{E}_M$ sur un élément de parcours $\overrightarrow{d\ell}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} d\,\mathscr{C} &= \vec{E}_M \cdot \overrightarrow{d\ell} \\ &= -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_M \cdot \overrightarrow{d\ell} = -dV_M \end{aligned}$$

On en déduit les relations :

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = -dV$$

$$\boxed{\int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = V_A - V_B} \tag{2.10}$$

Notez que la circulation du champ de A vers B est égale à la *valeur initiale moins la valeur finale* du potentiel.

Et en particulier, sur un parcours fermé :

$$\boxed{\oint_{(C)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0} \tag{2.11}$$



- La circulation de $\vec{E}$ est indépendante du parcours choisi, puisqu'elle ne dépend que de la différence de potentiel entre A et B. Le potentiel étant défini à une constante près, on voit que le choix de cette constante n'intervient pas dans la différence de potentiel.
- Par contre, la circulation de $\vec{E}$ dépend du sens de parcours choisi : c'est ce sens qui fixe le signe de la différence de potentiel. Il faut donc toujours orienter le parcours avant de calculer la circulation de $\vec{E}$.

2.6. LOI LOCALE ET LOI INTÉGRALE

■ Forme locale

La loi $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ permet de déterminer $\vec{E}$ en un point quelconque si V est connu en ce point (ou l'inverse). Elle présente un caractère général, libéré de toute considération de symétrie susceptible d'apparaître à l'échelle globale.

Cette loi peut s'écrire sous une autre forme, également locale : en effet, sachant que $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\,V) \equiv \vec{0}$, on peut écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}} \qquad (2.12)$$

Le champ électrique $\vec{E}$ est dit *irrotationnel*.

■ Forme intégrale

La loi $$\int_{\widehat{AB}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = V_A - V_B$$

ou encore $$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0 \qquad ((C) \text{ contour fermé})$$

peut permettre le calcul de $\vec{E}$ en un point, mais il faut passer par un calcul à l'échelle globale. C'est dire que cette loi intégrale ne présente de l'intérêt que si l'on peut mettre en évidence des symétries permettant de faciliter le calcul $\left(\text{par exemple lorsque } \vec{E} \text{ est uniforme et peut sortir du signe } \int\right)$. Dans ce cas, la deuxième méthode peut s'avérer plus rapide que la première.
D'autres lois locales et intégrales seront revues par la suite (théorème de Gauss par exemple).

2.7. EXEMPLES D'APPLICATION

Exemple 1. Comparaison entre force électrostatique et force de gravitation dans l'atome d'hydrogène

On donne la constante de gravitation $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ S.I. et le premier rayon de l'atome de Bohr $a_0 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}$ m.

Dans l'atome d'hydrogène, un électron (charge $-e$) décrit une orbite circulaire de rayon a_0 autour d'un noyau constitué d'un proton (charge $+e$). Il s'agit de comparer les forces électrostatique ($\vec{F}_e$) et gravitationnelle ($\vec{F}_g$) entre ces deux particules.

$$F_e = K\frac{q_1 q_2}{a_0^2} = \frac{910^9(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{(0{,}53 \cdot 10^{-10})^2} = 8{,}1 \cdot 10^{-8}\ \text{N}$$

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{a_0^2} = \frac{6{,}7 \cdot 10^{-11}(9{,}1 \cdot 10^{-31})(1{,}67 \cdot 10^{-27})}{(0{,}53 \cdot 10^{-10})^2}$$
$$= 3{,}7 \cdot 10^{-47}\ \text{N}$$

La force électrostatique est environ $2 \cdot 10^{39}$ fois plus grande que la force de gravitation. Cette dernière est donc tout à fait négligeable.

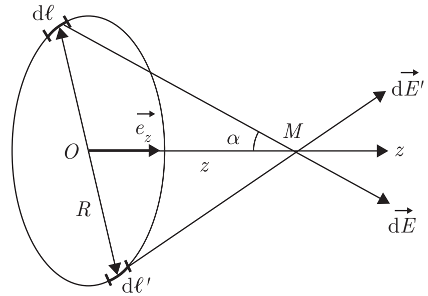


Pour les particules « élémentaires » (électrons, protons, ions,…) on néglige toujours les forces de gravitation ou de pesanteur devant les forces électrostatiques.

Exemple 2. Champ créé par un fil circulaire portant une densité de charge uniforme $\lambda = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\ell}$, *en un point M de son axe* ($\overline{OM} = z$).

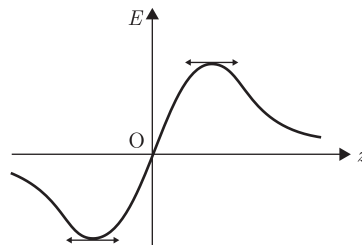
On suppose $\lambda > 0$.

1) Calcul direct du champ $\vec{E}$



À chaque élément $\mathrm{d}\ell$ du fil, on peut faire correspondre un élément $\mathrm{d}\ell'$ symétrique par rapport à O.
Par raison de symétrie, seule la composante de $\overrightarrow{\mathrm{d}E}$ sur l'axe $\overrightarrow{Oz}$ intervient : $\vec{E}$ est porté par $\vec{e}_z$.
Il est plus élégant de remarquer que tout plan contenant Oz est plan de symétrie pour la distribution de charge et contient donc $\vec{E}$ (qui est un vecteur polaire). En un point de l'axe, $\vec{E}$ appartient à l'intersection de ces plans : il est donc selon l'axe $\overrightarrow{Oz}$.
On a successivement :

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E\cos\alpha$$
$$= \frac{K\,\mathrm{d}q}{z^2 + R^2}\frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}$$



avec $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}\ell$

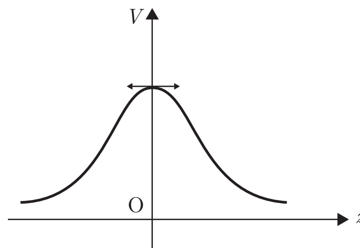
$$E_z = \frac{K\lambda z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}\ell \quad \text{et} \quad \vec{E} = \frac{\lambda Rz}{2\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$

2) Calcul direct du potentiel

$$\mathrm{d}V = \frac{K\,\mathrm{d}q}{(z^2+R^2)^{1/2}} = \frac{K\lambda\,\mathrm{d}\ell}{(z^2+R^2)^{1/2}}$$

$$V = \frac{K\lambda}{(z^2 + R^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi R} \mathrm{d}\ell$$

$$V(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}}$$



3) Calcul du champ à partir du potentiel

$$V = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} + \text{Cte} \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

On a successivement :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$E_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = \frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_{(z)} = \frac{\lambda R z}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

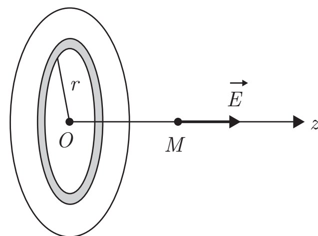
Exemple 3. Champ créé par un disque de rayon R portant une densité de charge surfacique uniforme $\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$, en un point M de son axe Oz.

On suppose $\sigma > 0$. Calculer le potentiel et en déduire le champ.

On peut considérer le disque comme engendré par un fil circulaire de rayon r et d'épaisseur dr, quand r varie de O à R.

De la sorte, on peut appliquer les résultats de l'exemple précédent.

Pour trouver la correspondance des densités de charge, on écrit que la charge $2\pi r\lambda$ portée par le fil de l'exemple précédent est maintenant portée par le fil de même rayon mais d'épaisseur dr. On a donc la correspondance :

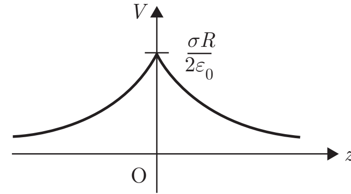


$$2\pi r\lambda \longmapsto 2\pi r\, \mathrm{d}r\sigma \quad \text{et} \quad \lambda \longmapsto \sigma\, \mathrm{d}r$$

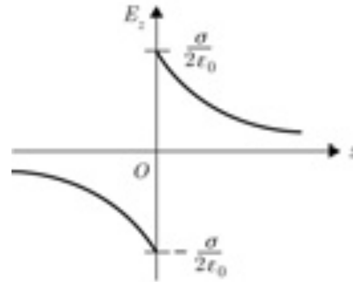
1) Calcul du potentiel

$V = \dfrac{\lambda R}{2\varepsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}}$ est à remplacer par $\quad \mathrm{d}V = \dfrac{\sigma r \,\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0 (r^2 + z^2)^{1/2}}$

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r\,\mathrm{d}r}{(r^2/z^2)^{1/2}}$$
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[(r^2 + z^2)^{1/2}]_0^R$$
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[(R^2 + z^2)^{1/2} - |z|]$$



2) Calcul du champ

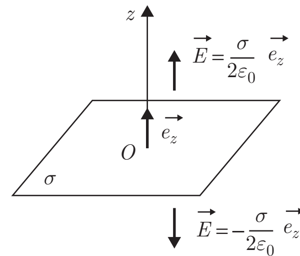


En faisant le même calcul directement, ou en passant par $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, on trouve :

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}}\right]\vec{e}_z$$

Remarque :

- On peut noter la discontinuité du champ $\vec{E}$ au passage par le point $O(z = 0)$.
- Le champ créé par un plan portant une densité de charge σ peut se déduire du résultat relatif au disque, en faisant tendre R vers l'infini.



On trouve : $\quad \vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{z}{|z|}\vec{e}_z$

- Le calcul direct du champ $\vec{E}$ créé par un disque chargé superficiellement, en un point M de son axe, sera proposé comme exercice.

Exemple 4. Potentiel créé par une sphère de centre O et de rayon R, chargée uniformément, en un point M extérieur à la sphère.

1) Sphère chargée en surface

Soit σ la charge surfacique.

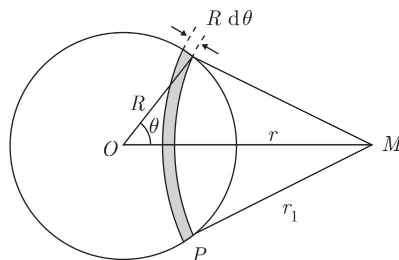
On a successivement :

$$dV_M = K\,\frac{dq}{r_1} \qquad dq = \sigma q\, dS$$

$$dS = 2\pi R \sin\theta R\, d\theta$$

$$dq = \sigma 2\pi R \sin\theta R\, d\theta$$

$$= \frac{Q}{2}\sin\theta\, d\theta$$



où $Q = 4\pi r^2\sigma$ est la charge totale portée par la sphère

$$r_1^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$$

$$2r_1\, dr_1 = 2Rr\sin\theta\, d\theta$$

$$dV_M = K\,\frac{Q}{2}\sin\theta\, d\theta \frac{dr_1}{Rr\sin\theta\, d\theta}$$

$$V_M = \frac{KQ}{2Rr}\int_{r-R}^{r+R} dr_1 = K\,\frac{Q}{r}$$

Tout se passe comme si la charge Q de la sphère était concentrée au centre O.

2) Sphère uniformément chargée en volume

Soit ρ la charge volumique. On peut considérer la sphère comme engendrée par une coque sphérique de rayon a et d'épaisseur da, quand a varie de O à R. Ainsi, on peut appliquer les résultats de *a)*.

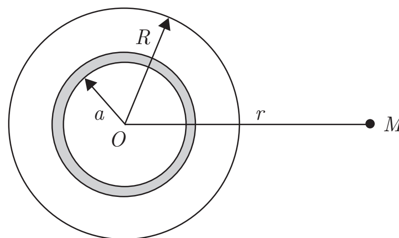
On a :

$$dV_M = \frac{K\, dq}{r} \qquad dq = 4\pi a^2\,\rho da$$

$$V_M = \frac{K4\pi\rho}{r}\int_0^R a^2\, da$$

$$= K\,\frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r}$$

$$= K\,\frac{Q}{r}$$



où $Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$ est la charge totale portée par la sphère.

Là encore, tout se passe comme si toute la charge Q de la sphère était ponctuelle et située au centre O.

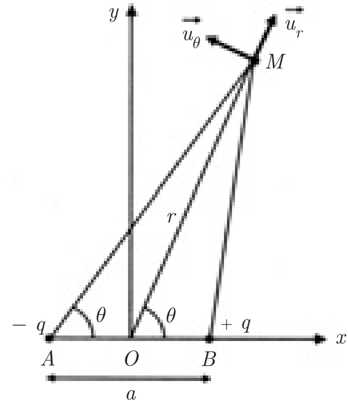
Remarque :
- L'application du théorème de Gauss permettra de retrouver tous ces résultats plus rapidement (voir chapitre **3**).
- Le calcul du champ créé à l'intérieur de la sphère précédente sera fait en utilisant ce théorème.

2.8 DIPÔLE ÉLECTROSTATIQUE

On considère deux charges $-q$, $+q$ placées aux points A et B, distants de a. Ce système, appelé dipôle électrique ou doublet électrique, constitue un objet en soi, qui crée un champ et un potentiel dans l'espace environnant. Le modèle théorique du dipôle trouve son application dans la polarisation des molécules conduisant à l'approximation dipolaire de la matière.
Les calculs du champ et du potentiel créés par un dipôle se font toujours en des points très éloignés du dipôle $OM \gg a$.

2.8.1 Calcul du potentiel à grande distance

$$V_M = Kq\left(\frac{1}{MB} - \frac{1}{MA}\right) = Kq\frac{MA - MB}{MB\,.\,MA}$$



Comme $OM = r \gg a$, on a :

$$MA \simeq r + \frac{a}{2}\cos\theta \qquad MB \simeq r - \frac{a}{2}\cos\theta$$

$$MB \cdot MA \simeq r^2$$

$$V_M = \frac{Kqa\cos\theta}{r^2}$$

On définit le *moment dipolaire* :

$$\vec{p} = q\overrightarrow{AB} = qa\,\vec{u}_{AB}$$

On peut noter que q est toujours la valeur absolue de la charge et que $\vec{p}$ est orienté de la charge négative vers la charge positive.

$$\boxed{V_M = K\,\frac{\vec{p}\cdot\vec{u}_r}{r^2} = \frac{Kp\cos\theta}{r^2}} \qquad (2.13)$$

2.8.2 Calcul du champ électrique à grande distance

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

$$\boxed{E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2Kp\cos\theta}{r^3}} \qquad (2.14)$$

$$\boxed{E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{Kp\sin\theta}{r^3}} \qquad (2.15)$$

■ Expressions cartésiennes

Le potentiel et le champ présentent évidemment une symétrie de révolution autour de l'axe support de $\overrightarrow{AB}$, pris ici comme axe Ox. Comme $\cos\theta = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$, on trouve :

$$V = K\frac{px}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = Kp\left[\frac{3x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right]$$

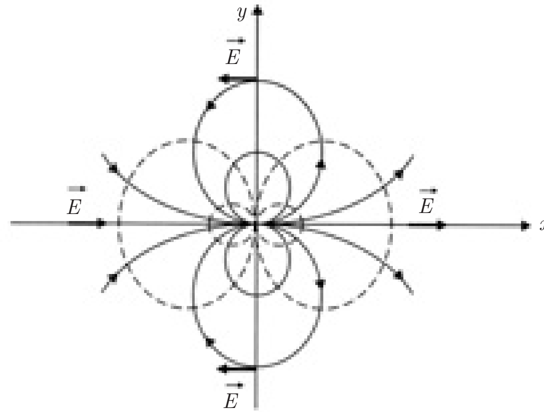
$$= Kp\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = Kp\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$= Kp\frac{3\sin\theta\cos\theta}{r^3}$$

Lorsqu'on s'éloigne du dipôle, le potentiel décroît en $\frac{1}{r^2}$ $\left(\text{comparé à } \frac{1}{r} \text{ par une charge ponctuelle}\right)$ et le champ en $\frac{1}{r^3}$ $\left(\text{comparé à } \frac{1}{r^2}\right)$.

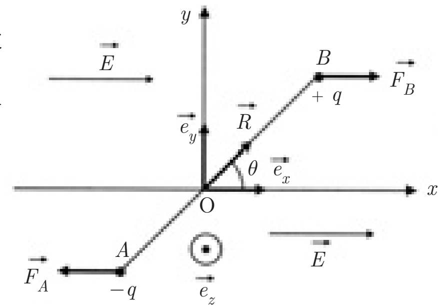
La figure ci-après indique l'allure des lignes de champs (en trait plein) et des lignes équipotentielles (en pointillés) dans le plan xOy.



2.8.3 Force et couple exercés par un champ électrique sur un dipôle

a) Cas d'un champ uniforme

Soit θ l'angle de AB (support du moment dipolaire $\vec{p}$) avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$ pris dans la direction du champ appliqué $\vec{E}$.



• *Force résultante sur le dipôle*

$$\vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_A = qE\vec{e}_x - qE\vec{e}_x = \vec{0}$$

La force résultante est nulle, mais le moment résultant ne l'est pas, $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ constituent un couple.

• *Moment résultant* :

$$\vec{\Gamma} = \frac{\vec{a}}{2} \wedge \vec{F}_B - \frac{\vec{a}}{2} \wedge \vec{F}_A$$

$$= \frac{\vec{a}}{2} \wedge q\vec{E} + \frac{\vec{a}}{2} \wedge q\vec{E} = \vec{a} \wedge q\vec{E}$$

$$\vec{\Gamma} = +\vec{p} \wedge \vec{E} = -pE \sin\theta \vec{e}_z$$

Ce moment tend à aligner le dipôle parallèlement au champ $\vec{E}$ $(\theta = 0)$.



Dans le cas d'une molécule assimilée à un dipôle, le point A représente le barycentre des charges négatives et le point B le barycentre des charges

positives. Le moment dipolaire moléculaire aura tendance à s'aligner avec le champ $\vec{E}$. On dit que la molécule (ou la substance) se polarise.

• *Énergie potentielle du dipôle dans le champ* $\vec{E}$:

$$E_{\mathrm{p}} = qV_B - qV_A = q(V_B - V_A)$$

Or le champ appliqué $\vec{E}$ est lié à $V_B - V_A$ par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}\vec{e}_x = -\frac{V_B - V_A}{a\cos\theta}\vec{e}_x$$

On en déduit :

$$E_{\mathrm{p}} = -aqE\cos\theta$$

soit
$$E_{\mathrm{p}} = -pE\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

L'énergie potentielle est minimum lorsque $\theta = 0$, indiquant que le dipôle est en équilibre stable quand il est orienté parallèlement au champ appliqué.

b) Cas d'un champ non uniforme

Dans ce cas, les forces $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_A$ ne sont plus égales et opposées. Il en résulte une force qui va déplacer le dipôle dans son ensemble. On aura donc un mouvement de translation de centre de masse O du dipôle, en plus du mouvement de rotation autour de O.

La force résultante est liée à l'énergie potentielle par :

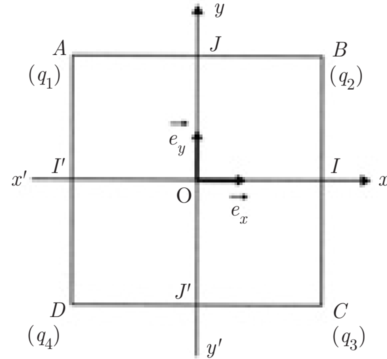
$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{E}_{\mathrm{p}}$$

On aura donc :

$$\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\vec{p}\cdot\vec{E})$$

EXERCICES

2.1. On place quatre charges ponctuelles aux sommets $ABCD$ d'un carré de côté $a = 1$ m, et de centre O, origine d'un repère orthonormé Oxy de vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$.



On donne :

$$q_1 = q = 10^{-8} \text{ C} \qquad q_2 = -2q$$

$$q_3 = 2q \qquad q_4 = -q$$

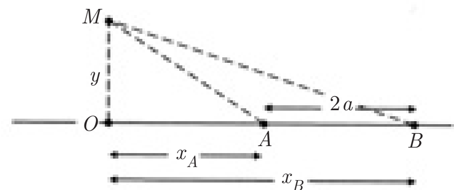
$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ S.I.}$$

1) Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ au centre O du carré. Préciser la direction, le sens et la norme de $\vec{E}$.

2) Exprimer le potentiel V créé en O par les quatres charges.

3) Exprimer le potentiel sur les parties des axes $x'x$ et $y'y$ intérieures au carré. Quelle est, en particulier, la valeur de V aux points d'intersection de ces axes avec les côtés du carré (I, I', J et J') ?

2.2. *1)* Calculer, en tout point M de l'espace, le champ électrique $\vec{E}$ créé par un fil rectiligne AB de longueur finie $2a$, portant une densité linéique de charges $\lambda > 0$.



Soit O la projection de M sur la droite AB, on posera :

$$OM = y, \quad OA = x_A, \quad OB = x_B$$

2) On examinera les cas particuliers suivants :

a) le point M est dans le plan médiateur de AB,

b) le fil a une longueur infinie.

2.3. On considère un disque de rayon R, de centre O, portant une densité de charge surfacique $\sigma > 0$.

1) Retrouver, par un calcul direct, le champ $\vec{E}$ créé par le disque en un point M de son axe $z'Oz$ ($OM = z > 0$) à partir du champ élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}^2E}$ créé par la charge élémentaire $\mathrm{d}q = \sigma\, \mathrm{d}S$ (voir exemple 3 du paragraphe 7 pour une autre méthode).

2) Que devient ce champ $\vec{E}$ lorsque le rayon du disque R tend vers l'infini ?

3) On considère un plan infini portant une densité de charge surfacique $\sigma > 0$, percé d'un trou circulaire de centre O et de rayon r.

Calculer le champ $\vec{E}$ en un point M de l'axe $z'Oz$ du trou.

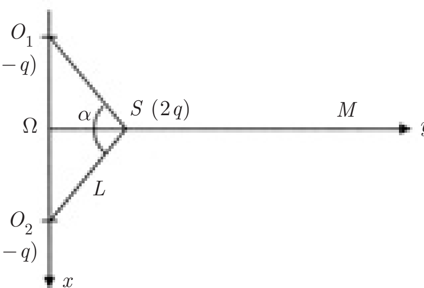
2.4. *1)* Un conducteur creux hémisphérique de centre O et de rayon R est chargé uniformément avec une densité de charge surfacique $\sigma > 0$.

Calculer le champ $\vec{E}_1$ créé au point O.

2) On considère maintenant une distribution de charge en volume ayant la forme de l'hémisphère ci-dessus et portant une charge volumique uniforme ρ. En considérant la distribution volumique comme engendrée par la distribution surfacique de la 1re question lorsque le rayon de cette dernière varie de O à R, calculer le champ électrique $\vec{E}_2$ créé au point O.

3) Retrouver ce dernier résultat par un calcul direct.

2.5. *A)* On assimile la molécule de SO_2 à un ensemble de trois charges ponctuelles disposées comme l'indique la figure. La charge positive $S(+2q)$ représentant l'atome de soufre est située à la même distance L des deux atomes d'oxygène, situés en O_1 et O_2, portant chacun une charge $-q$. On désigne par α l'angle entre les deux liaisons soufre-oxygène et on adopte le système d'axes Ωxy représenté sur la figure. L'origine Ω est située au milieu des deux atomes d'oxygène.



1) Montrer que cette distribution de charges électriques est équivalente à un dipôle.

2) En déduire le moment dipolaire $\vec{p}$ de la molécule SO_2 en précisant son orientation et sa norme.

$$A.N.: \quad \alpha = 120° \qquad L = 1{,}432 \cdot 10^{-10}\ \text{m} \qquad q = 0{,}29 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$$

B) Étant donné un point M situé sur l'axe Ωy à une grande distance de S, on désire justifier l'approximation dipolaire pour $\Omega M = 20L$ par exemple.

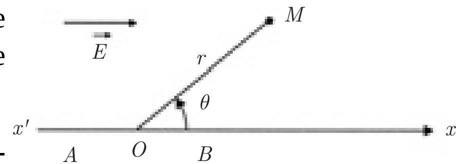
1) Calculer directement le champ $\vec{E}_M$ créé en M par les trois charges.

2) Calculer le champ $\vec{E}'_M$ créé au point M, en remplaçant les trois charges par le dipôle équivalent.

3) Comparer les résultats obtenus.

2.6. Dans l'espace où règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$, on considère sur un axe $x'Ox$ parallèle à $\vec{E}$ deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB}$ soit dans le même sens que $\vec{E}$.

1) Quelles sont les surfaces équipotentielles ?



2) Quel est le potentiel en un point M de l'espace situé à la distance r de O et tel que l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = \theta$.

3) On place les charges $-q$ et $+q$ respectivement en A et B.

a) Montrer que le dipôle AB est en équilibre stable.

b) Quel est le potentiel résultant en M ?

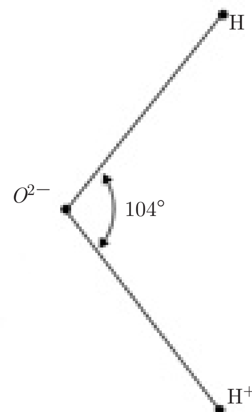
c) Montrer qu'il existe une sphère de centre O, sur laquelle ce potentiel reste constant. Calculer numériquement le rayon de cette sphère ?

d) Quelle est la valeur constante de ce potentiel ?

On donne : $q = 10^{-7}$ C $AB = 1$ cm $E = 72$ V · m^{-1}

$K = 9 \cdot 10^9$ S.I.

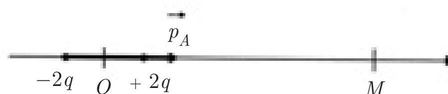
2.7. *A)* En première approximation, une molécule d'eau peut être considérée comme formée de deux ions H^+ et un ion O^{2-} disposés comme l'indique la figure. Calculer le moment dipolaire $\vec{p}_A$ de cette molécule sachant que les distances entre O^{2-} et les deux ions H^+ sont toutes les deux égales à 1 Å.



B) On considère une molécule d'eau A, placée au point O. Elle est assimilable à un dipôle électrique permanent de moment $\vec{p}_A$ dont le centre est en O.

En un point M, situé sur l'axe de la molécule A, à une distance r, on place successivement :

1) Une charge électrique $q > 0$. Quelle est la force exercée par la molécule A sur cette charge ?



2) Un dipôle de moment $\vec{p}$ orienté selon $\overrightarrow{OM}$.

a) Quelle est l'énergie potentielle du dipôle $\vec{p}$ dans le champ électrique $\vec{E}_M$ créé en M par la molécule A ? (On supposera que r est suffisamment grand pour que le champ $\vec{E}_M$ puisse être considéré comme constant autour de M.)

b) Quelle est la force à laquelle est soumis le dipôle ? On précisera sa direction et son sens.

3) On considère un dipôle induit $\vec{p}$ dont l'intensité est proportionnelle à l'intensité du champ $\vec{E}_M$, soit $\vec{p} = \beta \vec{E}_M$ (on supposera toujours $\vec{E}_M$ constant autour de M).

a) Quelle est l'énergie potentielle d'interaction de ce dipôle avec la molécule d'eau ?

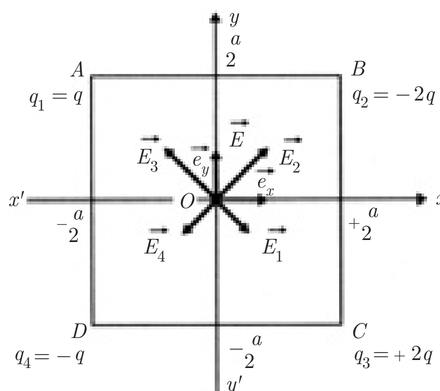
b) À quelle force est-il soumis ?

4) L'interaction dipôle-dipôle peut-elle suffire à expliquer la stabilité du système de deux molécules ? Justifier votre réponse.

CORRIGÉS

2.1. *1)* Détermination du champ $\vec{E}$ en O.

Soit $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ et $\vec{E}_4$ les champs créés en O respectivement par les charges q_1, q_2, q_3, q_4.



On a :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

Par raison de symétrie :

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 + \vec{E}_4 &= -2E_1 \cos\frac{\pi}{4}\vec{e}_y \\ &= -2K \cdot \frac{2q}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y \\ &= -\frac{2Kq}{a^2}\sqrt{2}\vec{e}_y\end{aligned}$$

On a de même :

$$\vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 2E_2 \cos\frac{\pi}{4}\vec{e}_y = 2K\frac{4q}{a^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$$
$$= 4K\frac{q}{a^2}\sqrt{2}\vec{e}_y \text{ soit :}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2Kq}{a^2}\sqrt{2}\vec{e}_y}$$

Le champ résultant $\vec{E}$ est donc :

– dirigé suivant l'axe $y'oy$;

– dans le sens positif de l'axe $y'oy$;

– de norme $E = \dfrac{2Kq}{a^2}\sqrt{2}$.

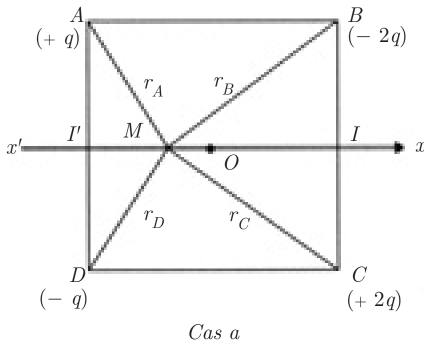
A.N. : $E = 9 \cdot 10^9 \times 10^{-8} \times 2\sqrt{2} = 254{,}6\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$

2) Détermination du potentiel V en O :
Soient V_1, V_2, V_3 et V_4 les potentiels créés par les charges q_1, q_2, q_3 et q_4 en O.

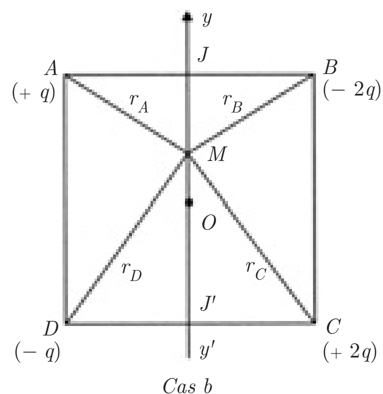
$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{2Kq}{a\sqrt{2}}[1 - 2 + 2 - 1]$$

soit : $$\boxed{V = 0}$$

3) Variation du potentiel sur les axes $x'Ox$ et $y'Oy$



Cas a



Cas b

a) Sur l'axe $x'Ox$, on a :

$$MA = MD \quad \text{et} \quad MB = MC$$

$$V = Kq\left[\frac{1}{MA} - \frac{2}{MB} + \frac{2}{MC} - \frac{1}{MD}\right] \text{ d'où } \quad V = 0$$

L'axe $x'Ox$ est une équipotentielle $V = 0$

I et I' étant sur l'axe, on a $\quad V(I) = V(I') = 0$.

b) Sur l'axe $y'Oy$, on a : $\quad MA = MB \quad$ et $\quad MC = MD$

$$V = Kq\left[\frac{1}{MC} - \frac{1}{MA}\right]$$

soit :

$$\boxed{V = Kq\left\{\left[(y-a)^2 + \frac{a^2}{4}\right]^{-\frac{1}{2}} - \left[(y-a^2) + \frac{a^2}{4}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}}$$

En deux points symétriques par rapport à O, sur l'axe $y'Oy$, les potentiels sont opposés :

$$V(y) = -V(-y)$$

Si M est en J, on a $\quad JA = \dfrac{a}{2} \quad$ et $\quad JC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, soit :

$$V(J) = Kq\left[\frac{2}{a\sqrt{5}} - \frac{2}{a}\right] = \frac{2Kq}{a}\left(\frac{\sqrt{5}-5}{5}\right)$$

Si M est en J', alors $V(J') = -V(J)$.

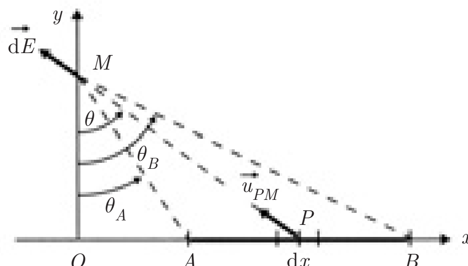
A.N. : $\quad V(J) = -99{,}5$ volts $\quad V(J') = 99{,}5$ volts

---

2.2. *1)* Calcul du champ $\vec{E}$ en M.

Soit $\overrightarrow{dE}$ le champ créé par un élément de fil de longueur dx autour de P.

$$\overrightarrow{dE} = K\frac{\lambda\, dx}{PM^2}\vec{u}_{PM}$$



Dans le triangle PMO, on a :

$$\tan\theta = \frac{x}{y} \Longrightarrow \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{dx}{y}$$

et $$y = PM\cos\theta \Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{d}E} = \frac{K\lambda \mathrm{d}\theta}{y}\vec{u}_{PM}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}E}\begin{cases}\mathrm{d}E_x = -\dfrac{K\lambda}{y}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \Longrightarrow E_x = -\dfrac{K\lambda}{y}\displaystyle\int_{\theta_A}^{\theta_B}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}E_y = \dfrac{K\lambda}{y}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \Longrightarrow E_y = -\dfrac{K\lambda}{y}\displaystyle\int_{\theta_A}^{\theta_B}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\end{cases}$$

En posant $$\theta_A = (\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA}),\quad \theta_B = (\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB})$$

$$\boxed{\begin{cases}E_x = \dfrac{K\lambda}{y}(\cos\theta_B - \cos\theta_A) = \dfrac{K\lambda}{y}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right) \\ E_y = \dfrac{K\lambda}{y}(\sin\theta_B - \sin\theta_A) = \dfrac{K\lambda}{y}\left(\dfrac{x_B}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \dfrac{x_A}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right)\end{cases}}$$

2) Cas particuliers

a) M sur le plan médiateur de AB

$$x_A = -x_B \quad \Longrightarrow \boxed{\begin{cases}E_x = 0 \\ E_y = \dfrac{2K\lambda}{y}\dfrac{x_B}{\sqrt{x_B^2+y^2}}\end{cases}}$$

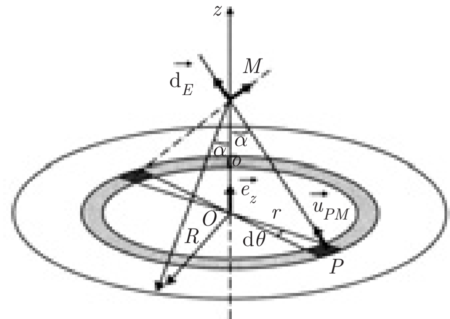
b) Le fil a une longueur infinie :

$$\left.\begin{array}{l}x_A \longrightarrow -\infty \\ x_B \longrightarrow +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases}E_x = 0 \\ E_y = \dfrac{2K\lambda}{y}\end{cases}}$$

2.3. *1)* Tout plan contenant Oz est un plan de symétrie, donc sur l'axe $\vec{E}//\overrightarrow{Oz}$.

Le champ créé par un élément de surface dS est :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}^2E} = K\frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{PM^2}\,\vec{u}_{PM}$$



avec $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r\ r\ \mathrm{d}\theta$ et $PM = \dfrac{z}{\cos\alpha}$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}^2E} = \frac{Kr\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta}{z^2}\sigma\cos^2\alpha$$

Le champ $\mathrm{d}E_z$ créé par la couronne comprise entre les deux rayons r et $r + \mathrm{d}r$ est :

$$\mathrm{d}E_z = \frac{Kr\mathrm{d}r}{z^2}\sigma\cos^3\alpha\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = K\frac{2\pi r\ \mathrm{d}r}{z^2}\sigma\cos^3\alpha$$

On a, pour tous les éléments de la couronne :

$$\tan\alpha = \frac{r}{z} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\mathrm{d}r}{z}$$

$$\mathrm{d}E_z = K\ \frac{2\pi}{z^2}z(\tan\alpha)z\frac{\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha}\ \sigma\cos^3\alpha$$
$$= K2\pi\sigma\sin\alpha\ \mathrm{d}\alpha$$

Le champ E_z créé par le disque de rayon R est donc :

$$E_z = K\ 2\pi\sigma\int_0^{\alpha_0}\sin\alpha\ \mathrm{d}\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1 - \cos\alpha_0)$$

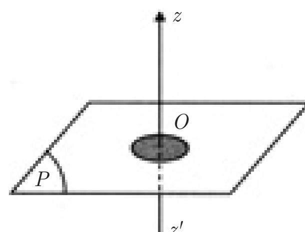
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\vec{e}_z}$$

2) Quand R tend vers l'infini, alors :

$$\boxed{\vec{E} \longrightarrow \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z}$$

3) D'après le principe de superposition, le champ $\vec{E}$ créé par le plan percé d'un trou est :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



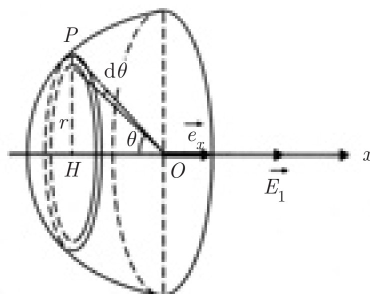
où $\vec{E}_1$ est le champ créé par le plan infini chargé avec une densité $+\sigma$,

$\vec{E}_2$ est le champ créé par le disque chargé avec une densité $-\sigma$,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} + \left[-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{(z^2 + r^2)^{1/2}}\right)\right]\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ \frac{z}{(z^2 + r^2)^{1/2}}\ \vec{e}_z}$$

2.4. *1)* Cas d'une distribution surfacique hémisphérique



Par symétrie, le champ $\vec{E}_1$ produit par l'hémisphère, portant une densité surfacique $\sigma > 0$, a le sens du vecteur unitaire $\vec{e}_x$ porté par l'axe Ox.

On pose : $OP = R$
$PH = R \sin\theta$

La charge élémentaire $\sigma\,\mathrm{d}S$, prise sur la couronne de rayon HP, contribue au champ total par :

$$\mathrm{d}E_1 = K\,\frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{R^2}\cos\theta \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}S = 2\pi R\sin\theta R\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E_1 = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi R^2}{R^2}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$E_1 = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sigma}{8\varepsilon_0}[-\cos 2\theta]_0^{\pi/2}$$

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{e}_x}$$

2) Cas d'une distribution volumique hémisphérique

Pour trouver la correspondance entre les densités de charge surfacique et volumique, on écrit que la charge $2\pi r^2\sigma$ portée par la distribution surfacique précédente est maintenant portée par la demi-coquille de rayon r, d'épaisseur dr, donc de volume $\mathrm{d}\tau = 2\pi r^2\,\mathrm{d}r$, soit

$$2\pi r^2\sigma \longmapsto 2\pi r^2\,\mathrm{d}r\,\rho \qquad \text{et} \qquad \sigma = \rho\,\mathrm{d}r$$

Champ créé par cette coquille au point O :

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{e}_x \qquad \longmapsto \qquad \mathrm{d}\overrightarrow{E_2} = \frac{\rho\,\mathrm{d}r}{4\varepsilon_0}\vec{e}_x$$

On en déduit pour le champ total :

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}\int_0^R \mathrm{d}r\,\vec{e}_x = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}\vec{e}_x$$

3) Calcul direct

$$\overrightarrow{\mathrm{d}E} = K\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{u}_{OM} \Longrightarrow \mathrm{d}E_x = \frac{R\,\mathrm{d}q\cos\theta}{r^2}$$

$d\tau$ étant l'élément de volume autour de M, on a :

$$dq = \rho \, d\tau$$

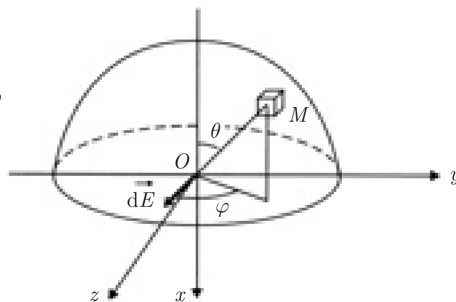
avec $\quad d\tau = r \sin\theta \, d\varphi \; r d\theta \, dr$

$$dq = \rho r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$E_X = K\rho \int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= K\rho R 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2\theta \, d\theta$$

$$= K\rho R\pi \left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2} = K\rho R\pi$$



Par raison de symétrie, $\vec{E}$ est dirigé suivant $O\vec{x}$. En effet, tout plan contenant Ox est plan de symétrie pour la distribution de charge :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} R\vec{e}_x}$$

Le champ électrique d'une distribution sphérique uniforme (sphère complète) au centre O est nul par symétrie, que la distribution soit surfacique ou volumique.

2.5. *A) 1)* La distribution de charges est équivalente à un dipôle :

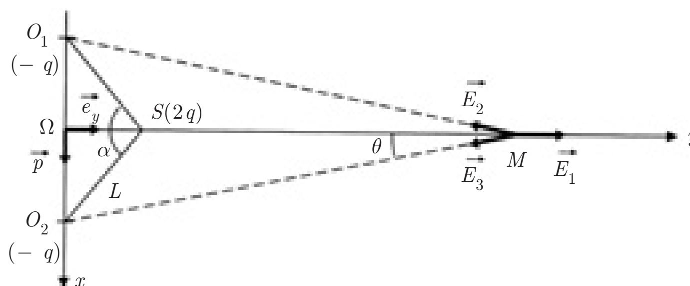
– $\Sigma q = 0$

– le barycentre des charges positives est en S et celui des charges négatives en Ω.

2) $\vec{p} = 2q\,\overrightarrow{\Omega S}$

$$p = 2q\,\Omega S = 2q\,L\cos\frac{\alpha}{2}$$

$A.N.$: $p = 2 \times 0{,}29 \cdot 10^{-19} \times 1{,}432 \cdot 10^{-10} \times \frac{1}{2} = 0{,}415 \cdot 10^{-29}$ C.m. ;



B) 1) Soit $\vec{E}_1$ le champ créé par l'atome de soufre et $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$ les champs créés par les deux atomes d'oxygène.

$$\vec{E}_1 = \frac{2Kq}{SM^2}\vec{e}_y \qquad \vec{E}_2 = -\frac{Kq}{O_1M^2}\vec{u}_{O_1M} \qquad \vec{E}_3 = -\frac{Kq}{O_2M^2}\vec{u}_{O_2M}$$

$$O_1M = O_2M$$

$\vec{E}_2$ et $\vec{E}_3$ sont donc symétriques par rapport à Ωy.

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + (\vec{E}_2 + \vec{E}_3) = \frac{2Kq}{SM^2}\vec{e}_y - \frac{2Kq}{O_1M^2}\cos\theta\,\vec{e}_y$$

Or
$$SM^2 = (\Omega M - \Omega S)^2 = \Omega M^2\left(1 - \frac{\Omega S}{\Omega M}\right)^2$$

et
$$O_1M^2 = \Omega M^2\left[1 + \left(\frac{\Omega O_1}{\Omega M}\right)^2\right]$$

Le point M étant situé à grande distance de Ω, on peut poser :

$$\frac{\Omega S}{\Omega M} = \varepsilon_1 \ll 1 \qquad \frac{\Omega O_1}{\Omega M} = \varepsilon_2 \ll 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{SM^2} \simeq \dfrac{1}{\Omega M^2}(1 + 2\varepsilon_1) \\ \dfrac{1}{O_1M^2} \simeq \dfrac{1}{\Omega M^2}(1 - \varepsilon_2^2) \\ \cos\theta \simeq 1 - \dfrac{\varepsilon_2^2}{2} \end{cases}$$

$$\vec{E}_M \simeq \frac{2Kq}{\Omega M^2}\vec{e}_y\left[1 + 2\varepsilon_1 - 1 + \frac{3}{2}\varepsilon_2^2\right] \quad \text{soit :}$$

$$\boxed{\vec{E}_M = \frac{2Kq}{\Omega M^2}\left(2\varepsilon_1 + \frac{3}{2}\varepsilon_2^2\right)\vec{e}_y}$$

A.N. :
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{40} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{3}}{40}$$

$$E_M = 3{,}18 \cdot 10^6(1 + 0{,}056) = 3{,}35 \cdot 10^6\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

2) Le champ créé par le dipôle $(-2q, +2q)$ dont les charges sont placées en Ω et en S est :

$$\vec{E'}_M = 2Kq\left[\frac{1}{SM^2} - \frac{1}{\Omega M^2}\right]\vec{e}_y$$

$$= \frac{2Kq}{\Omega M^2}[1 + 2\varepsilon_1 - 1]\vec{e}_y = \frac{2Kq}{\Omega M^2}2\varepsilon_1\vec{e}_y$$

$$\boxed{\vec{E}'_M = \frac{4Kq}{\Omega M^2}\varepsilon_1\,\vec{e}_y}$$

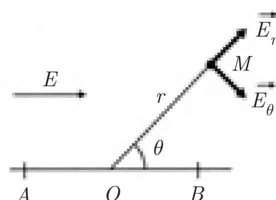
A.N. : $\vec{E}'_M = 3{,}18 \cdot 10^6\ \mathrm{Vm}^{-1}$

3) À la distance $\Omega M = 20L$, l'erreur relative effectuée en utilisant l'approximation dipolaire est :

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_M - E'_M}{E_M} \simeq \frac{3\varepsilon_2^2}{2 \times 2\varepsilon_1} = 0{,}056$$

L'approximation dipolaire sera meilleure pour une distance ΩM bien supérieure à $20L$.

2.6. *1)* Le champ électrique $\vec{E}$ étant uniforme et parallèle à AB, les surfaces équipotentielles $V =$ cte sont les plans perpendiculaires à $\vec{E}$, donc à AB (voir paragraphe 3).



2) $-\mathrm{d}V = \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ ou $\vec{E} = E\cos\theta\vec{u}_r - E\sin\theta\vec{u}_\theta$

et $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta$

$$-\int_{V(O)}^{V(M)} \mathrm{d}V = \int_0^r E\cos\theta\,\mathrm{d}r$$

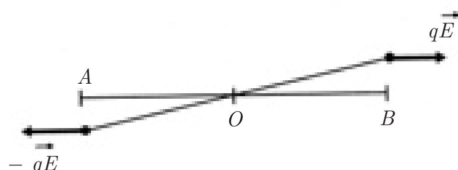
D'où $$V(O) - V(M) = +Er\cos\theta$$

$$V(M) = V(O) - Er\cos\theta$$

3) a) Le dipôle est soumis à un couple de forces de moment :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} = q\overrightarrow{AB} \wedge \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{car } \overrightarrow{AB} /\!/ \vec{E})$$

Le dipôle est donc en équilibre ; l'équilibre est stable car, lorsqu'on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre, le couple de forces $(q\vec{E}, -q\vec{E})$ tend à l'y ramener.



b) Le potentiel résultant en M est :

$$V_M = V_{\text{dipôle}} + V_{\text{champ } E}$$

$$\boxed{V_M = \frac{Kp\cos\theta}{r^2} + V_0 - Er\cos\theta}$$

c) Surface équipotentielle :

$$\frac{Kp\cos\theta}{r^2} - Er\cos\theta = \text{Cte}$$

$$\cos\theta\left(\frac{Kp}{r^2} - Er\right) = \text{Cte}$$

Pour que la relation ci-dessus soit valable quelle que soit la valeur de θ, il faut que la constante soit nulle, ce qui donne :

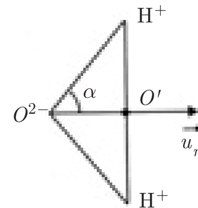
• $\cos\theta = 0$: le plan médiateur de AB est une équipotentielle de potentiel V_0.

• $r^3 = \dfrac{Kp}{E}$: $r = \left(\dfrac{Kp}{E}\right)^{1/3}$ ce qui correspond à une sphère de centre O et de rayon r.

A.N. : $$r = \left(\frac{9\times 10^9 \times 10^{-9}}{72}\right)^{1/3} = 0{,}5 \text{ m}$$

d) Sur la sphère le potentiel V est constant et égal à V_0.

2.7. *A)* Moment dipolaire de la molécule H_2O :

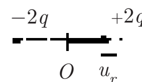


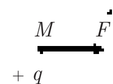
$$\vec{p}_A = 2|e|\,\overrightarrow{OO'} = 2|e|\,OH\cos\alpha\cdot\vec{u}_r$$

A.N. : $$\cos\alpha = \cos 52° = 0{,}615$$

$$p_A = 2\times 1{,}6\cdot 10^{-19}\times 10^{-10}\times 0{,}615 = 19{,}68\cdot 10^{-29}\ \text{C.m}$$

B) 1) Force exercée par la molécule A sur la charge $+q$ placée en M : $\vec{F} = q\cdot\vec{E}_A$





Sur l'axe du dipôle, on a :

$$\vec{E}_A = E_A\,\vec{u}_r = 2K\frac{p_A}{r^3}\vec{u}_r$$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{F} = \frac{q\,2Kp_A\vec{u}_r}{r^3}$$

La charge q étant positive, la force $\vec{F}$ est répulsive.

2) a) Énergie potentielle du dipôle placé en M :

$$E_\mathrm{p} = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -(p\vec{u}_r)\cdot\left(2Kp_A\frac{\vec{u}_r}{r^3}\right) = -\frac{2Kp_Ap}{r^3}$$

b) Force à laquelle est soumis le dipôle placé en M :

$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r = -6K\frac{p_Ap}{r^4}\vec{u}_r \quad \text{(attractive)}$$

3) a) Énergie potentielle du dipôle induit.

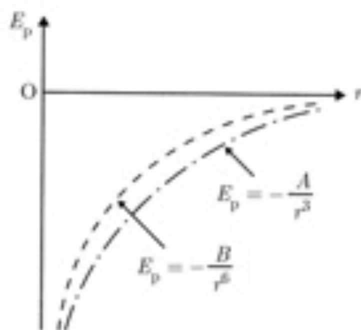
Comme $\vec{p} = \beta\vec{E}$, on a :

$$E_\mathrm{p} = -\vec{p}\vec{E} = -\beta E^2 = -\frac{\beta K^2 4p_A^2}{r^6} = -\frac{4\beta K^2 p_A^2}{r^6}$$

b) Force à laquelle est soumis le dipôle induit :

$$\boxed{\vec{F} = -\beta K^2\frac{24p_A^2}{r^7}\vec{u}_r} \quad \text{(attractive)}$$

4) L'allure de la courbe de l'énergie potentielle qui est en $-\dfrac{1}{r^3}$ (2e question) ou en $-\dfrac{1}{r^6}$ (3e question) montre que dans les deux cas la position d'équilibre est l'infini ; le dipôle induit est attiré par le premier dipôle.



Pour rendre compte de la stabilité du système de molécules, il faut introduire, dans l'énergie potentielle, un terme de répulsion à courte distance.

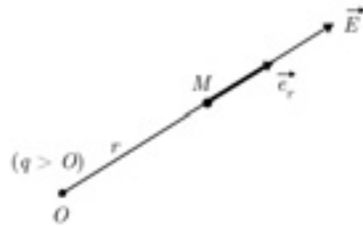
3

Théorème de Gauss

3.1. FLUX DU CHAMP ÉLECTRIQUE CRÉÉ PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

Soit une charge q placée au point O.
Le champ créé par cette charge en un point M, à une distance $OM = r$ est donnée par :

$$\vec{E} = K\,\frac{q}{r^2}\,\vec{e}_r$$



Rappelons les propriétés suivantes de ce champ en $\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}$:

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \qquad \text{(voir Exercice 5 chapitre } \mathbf{1}\text{)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \qquad \text{car } \vec{E} \text{ est un gradient.}$$

Circulation de $\vec{E}$ le long d'un contour (C) fermé :

$$\oint_{(C)} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0$$

Pour le calcul du flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée (S), deux cas peuvent se présenter :

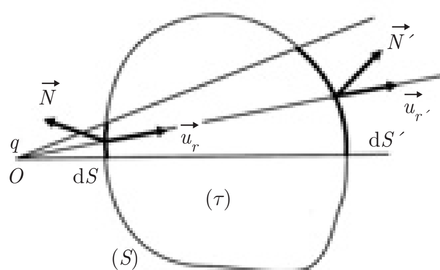
a) q **n'est pas englobée par** (S)

Soit $\mathrm{d}S$ et $\mathrm{d}S'$ deux éléments de surface découpés par l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ issu de O.

On a :

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = K\,\frac{q}{r^2}\vec{e}_r\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}S = -Kq\,\mathrm{d}\Omega$$

$$\mathrm{d}\Phi' = \vec{E}'\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S'} = K\,\frac{q}{r'^2}\vec{e}_r\cdot\vec{N}'\,\mathrm{d}S' = -Kq\,\mathrm{d}\Omega$$



Au total $\quad \mathrm{d}\Phi_T = \mathrm{d}\Phi + \mathrm{d}\Phi' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Phi = 0$

D'ailleurs, d'après le théorème de la divergence, puisque div $\vec{E} = 0$, on peut écrire également :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_\tau \mathrm{div}\vec{E}\ \mathrm{d}\tau = 0$$

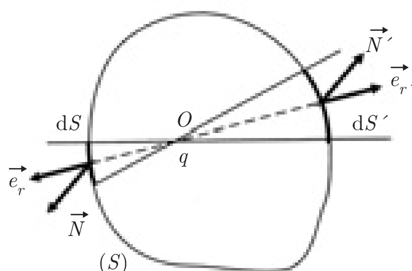
en remarquant que $\vec{E}$ est toujours défini dans le volume (τ).

b) q **est englobée par** (S)

Dans ce cas,

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = Kq\,\mathrm{div}\left(\frac{\vec{e}_r}{r^2}\right)$$

n'est pas défini en O.



Le théorème de la divergence n'est donc pas applicable (voir Exercice 9 chapitre **1**).

On a :

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Kq}{r^2}\vec{e}_r \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}S = Kq\,\mathrm{d}\Omega$$

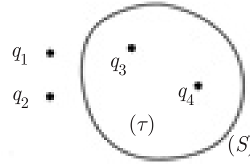
$$\mathrm{d}\Phi' = \vec{E}' \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S'} = \frac{Kq}{r'^2}\vec{e}_r \cdot \vec{N}'\,\mathrm{d}S' = Kq\,\mathrm{d}\Omega$$

Au total (*cf.* chapitre **1** exemple 4) $\quad \Phi = \iint_S Kq\,\mathrm{d}\Omega = 4\pi Kq$

soit : $\quad \Phi = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$ puisque $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

3.2. THÉORÈME DE GAUSS

On considère plusieurs charges q_i, les unes à l'intérieur du volume τ, les autres à l'extérieur.



Si q_i est à l'intérieur : $\Phi_i = \dfrac{q_i}{\varepsilon_0}$

Si q_i est à l'extérieur : $\Phi_i = 0$

Par conséquent, le flux du champ résultant à travers (S) n'est dû qu'aux seules charges intérieures à S :

$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0} \quad \text{(charges intérieures uniquement)}} \tag{3.1}$$

Intérêt du théorème de Gauss

Par rapport au calcul direct du champ $\vec{E}$, le théorème peut présenter des avantages si des considérations de symétrie s'avèrent favorables : par exemple : $\vec{E} \perp \vec{N} (\vec{E} \cdot \vec{N} = 0)$ en tout point de la surface ou encore norme de $\vec{E}$ constante.

3.3. LOI LOCALE ET LOI INTÉGRALE

Soit une surface (S) fermée, contenant une charge Q répartie uniformément dans le volume τ qu'elle entoure, la densité volumique étant ρ.
On a alors :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{(\tau)} \rho \, \mathrm{d}\tau = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \tag{3.2}$$

Cette écriture constitue la forme intégrale du théorème de Gauss.

Le théorème de la divergence permet d'écrire par ailleurs :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_\tau \operatorname{div} \vec{E} \, \mathrm{d}\tau$$

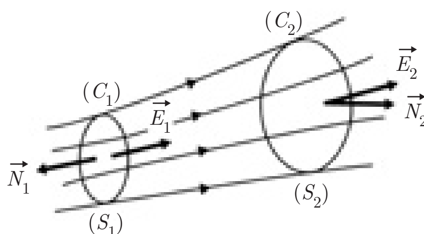
De ces relations, on déduit la forme locale suivante pour le théorème de Gauss :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \tag{3.3}$$

Cette deuxième loi locale de l'électrostatique (comme la première $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ ou $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$) présente un caractère général, elle ne fait intervenir que le point considéré indépendamment de toute symétrie globale.

3.4. CONSERVATION DU FLUX LE LONG D'UN TUBE DE CHAMP

Un tube de champ est constitué par toutes les lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé : contour (C_1) sur la figure, qui devient (C_2) un peu plus loin, dans le sens du champ.



Si le tube compris entre (C_1) et (C_2) ne contient aucune charge, on a : $\rho = 0$. Comme aucun flux ne sort de la paroi latérale du tube, on a :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tube}} &= \Phi_1 \text{ (sortant)} + \Phi_2 \text{ (sortant)} \\ &= \iiint_{(\tau)} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \mathrm{d}\tau = 0 \end{aligned}$$

D'après l'orientation des vecteurs $\vec{N}_1$ et $\vec{N}_2$, on voit que Φ_1 (sortant) est négatif, alors que Φ_2 (sortant) est positif.

Si on choisit d'orienter les deux normales dans le sens de $\vec{E}$, on peut définir des flux Ψ_1 et Ψ_2 de même signe, tels que $\Psi_1 = -\Phi_1$ et $\Psi_2 = \Phi_2$. On peut alors écrire :

$$\Psi_1 = \Psi_2$$

qui exprime à l'échelle globale que le flux est conservatif à travers les différentes sections du tube.

À l'échelle locale, en l'absence de charge, la conservation du flux de $\vec{E}$ s'exprime simplement par :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

3.5. ÉQUATIONS DE POISSON ET DE LAPLACE

En présence d'une densité volumique de charge, on peut écrire les deux lois locales :

$$\begin{cases} \vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \\ \text{div}\, \vec{E} &= \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \Longrightarrow \text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}\, V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

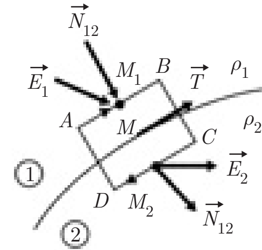
Or $\text{div}\,(\overrightarrow{\text{grad}}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \Delta$. On en déduit :

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0} \quad \text{(équation de Poisson)} \qquad (3.4)$$

et dans le vide :

$$\boxed{\Delta V = 0} \quad \text{(équation de Laplace)} \qquad (3.5)$$

3.6. CONDITIONS DE PASSAGE À L'INTERFACE ENTRE DEUX DISTRIBUTIONS DE CHARGES DIFFÉRENTES



Soit deux points M_1 et M_2 infiniment voisins du point M pris sur l'interface séparant les deux distributions.
En ces points, on a respectivement :

$$\vec{E}_1 = E_{1T}\, \vec{T} + E_{1N}\, \vec{N}_{12}$$

$$\vec{E}_2 = E_{2T}\, \vec{T} + E_{2N}\, \vec{N}_{12}$$

où $\vec{T}$ est le vecteur unitaire porté par la tangente en M à l'interface, et $\vec{N}_{12}$ est le vecteur unitaire normal à l'interface, orienté du milieu (1) vers le milieu (2).
On veut exprimer que la circulation de $\vec{E}$ le long du contour fermé élémentaire (C) représenté sur la figure est nulle. En supposant que la contribution des côtés AD et BC est négligeable devant celle des côtés AB et DC, on peut écrire :

$$\oint_{(C)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0 = E_{1T}\, AB - E_{2T} CD \quad \text{avec} \quad AB = CD$$

on en déduit :

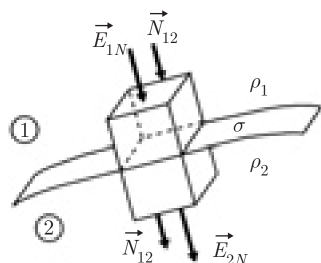
$$\boxed{\vec{E}_{1T} = \vec{E}_{2T}} \tag{3.6}$$

La composante tangentielle de $\vec{E}$ se conserve, malgré la discontinuité de ρ sur l'interface.



Supposons maintenant que l'interface porte une charge surfacique σ.

On considère le parallélépipède élémentaire représenté sur la figure, et on cherche à déterminer le flux de $\vec{E}$ sortant de ce parallélépipède.



La contribution des densités volumiques ρ_1 et ρ_2 à ce flux étant un infiniment petit du 3e ordre comparée à la contribution de la densité surfacique σ qui est du 2e ordre, on peut ignorer les charges volumiques et écrire :

$$\Phi = \int_{(S \text{ totale})} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = E_{2N}S - E_{1N}S$$

Le théorème de Gauss s'exprime par :

$$\Phi = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

on en déduit :

$$\boxed{\vec{E}_{2N} - \vec{E}_{1N} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{N}_{12}} \tag{3.7}$$

La composante normale de $\vec{E}$ subit une discontinuité proportionnelle à la densité surfacique σ. Elle ne se conserve que si l'interface ne porte pas de charges.

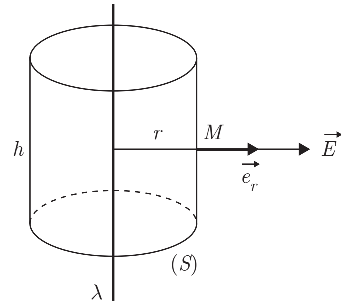


Le calcul du champ $\vec{E}$ au voisinage d'un plan infini chargé, effectué dans l'exemple 3 du chapitre **2**, a montré que ce champ est donné par $\vec{E} = \pm\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{N}_{12}$ de part et d'autre du plan.

On retrouve bien la discontinuité égale à $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ en traversant le plan chargé.

3.7. EXEMPLES D'APPLICATION

Exemple 1. Champ créé par un fil rectiligne infini chargé d'une densité linéïque



La distribution de charge est invariante par rotation autour du fil et par translation parallèle au fil : le potentiel et le champ ne peuvent donc dépendre des coordonnées cylindriques φ et z :

$$V = V(r) \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$$

Le champ électrique est donc radial.

Pour calculer le champ en M, on peut alors choisir comme surface fermée d'intégration (S) un cylindre de révolution autour du fil, de rayon r et de hauteur h (surface de Gauss).

Le flux sortant par les bases de (S) étant nul, on a :

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{(S\text{ lat.})} E\,\mathrm{d}S = E\iint_{(S\text{ lat.}} \mathrm{d}S = 2\pi r h E$$

$$\Sigma\frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

Le potentiel en M se déduit de $\vec{E}$ par

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}V = -E\,\mathrm{d}r$$

D'où :

$$V = -\int E\,\mathrm{d}r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + \text{cte}$$

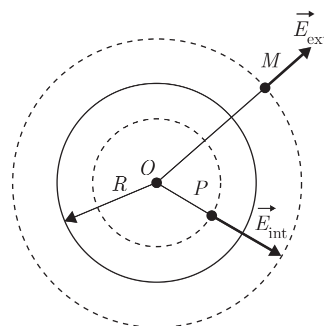
Les lignes de champ sont des droites radiales, et les surfaces équipotentielles des cylindres coaxiaux, de révolution autour du fil.
Notez qu'il n'est pas possible ici de choisir la constante de sorte que le potentiel soit nul à l'infini : ceci est dû à la présence de charges à l'infini.

Exemple 2. Champ créé par une sphère chargée d'une densité volumique ρ uniforme

Ce problème a déjà été résolu par un calcul direct dans l'exemple 4 du chapitre **2**. Le calcul était limité à un point M à l'extérieur de la sphère. Il s'agit ici de l'étendre à tout point de l'espace.

Par suite de la symétrie sphérique, on peut considérer que $V = V(r)$ et par conséquent que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -(\mathrm{d}V/\mathrm{d}r)\vec{e}_r$ est radial d'une part, et ne dépend que de r d'autre part.

1) **Champ à l'extérieur :** $OM \geqslant R$.



Soit (S_1) la surface de Gauss passant par le point M extérieur (sphère de rayon r).

On a :

$$\oiint E_{\text{ext}}\, \mathrm{d}S = E_{\text{ext}} \oiint_{(S_1)} \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E_{\text{ext}}$$

$$\Sigma \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{\varepsilon_0}\rho$$

Le théorème de Gauss donne donc :

$$4\pi r^2 E_{\text{ext}} = \frac{4}{3}\pi \frac{R^3}{\varepsilon_0}\rho \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}_{\text{ext}} = \rho \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \frac{KQ}{r^2}\vec{e}_r$$

expression déjà trouvée par le calcul direct.

2) **Champ à l'intérieur :** $OP \leqslant R$.

Soit (S_2) la surface de Gauss passant par le point P intérieur (sphère de rayon r).

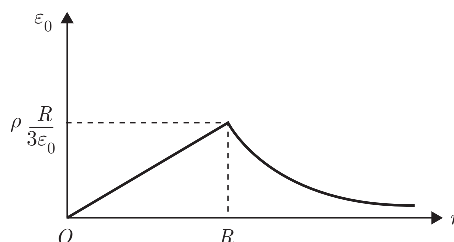
On a encore : $$\oiint_{(S_2)} \vec{E}_{\text{int}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 4\pi r^2 E_{\text{int}}$$

$$\Sigma \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3}\pi \frac{r^3}{\varepsilon_0}\rho$$

Le théorème de Gauss donne cette fois :

$$4\pi r^2 E_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi \frac{r^3}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r$$



D'où la variation de E en fonction de r représentée sur la figure.

3) **Calcul du potentiel**

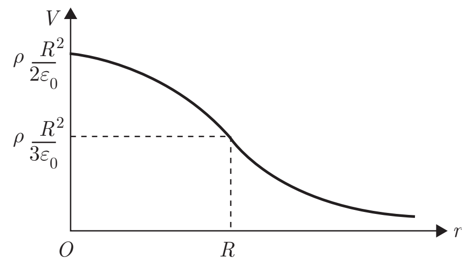
Le champ $\vec{E}$ étant radial, $\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}r} = -E\,\mathrm{d}r$. À l'extérieur, on a :

$$V_{\text{ext}} = -\int E_{\text{ext}}\,\mathrm{d}r = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_1$$

Lorsque $r \longrightarrow \infty \quad V \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 0.$

À l'intérieur :

$$\begin{aligned} V_{\text{int}} &= -\int E_{\text{int}}\,\mathrm{d}r \\ &= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r\,\mathrm{d}r \\ &= -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C_2 \end{aligned}$$



La continuité de V à la surface de la sphère donne :

$$\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 R} = -\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + C_2 \qquad \Longrightarrow \qquad C_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

Finalement : $$V_{\text{int}} = \rho\frac{R^2}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{r^2}{3R^2}\right]$$

Exemple 3. Application de l'équation de Poisson

Retrouver l'expression du potentiel $V(r)$ créé par une sphère chargée d'une densité volumique ρ en intégrant l'équation de Poisson.

L'équation locale de Poisson s'écrit :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Par suite de la symétrie sphérique, on a :

$$\Delta V = \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2}$$

Par suite de l'absence de charge pour $r > R$, on a :

$$\begin{cases} r \geqslant R \ : \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} = 0 \\ r \leqslant R \ : \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

La 1re équation donne :

$$rV = Ar + B \quad \Longrightarrow \quad V = A + \frac{B}{r}$$

$V(r)$ étant nul à l'infini $\Longrightarrow A = 0 \Longrightarrow V = \dfrac{B}{r}$

La 2e équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} = -\rho\frac{r}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \frac{\partial(rV)}{\partial r} = -\frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0} + C$$

$$\Longrightarrow rV = -\frac{\rho r^3}{6\varepsilon_0} + Cr + D \Longrightarrow V = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C + \frac{D}{r}$$

$V(r)$ étant fini en $r = 0 \Longrightarrow D = 0$

Il reste donc à déterminer les deux constantes B et C.

Continuité de V en $r = R$: $\dfrac{B}{R} = -\dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + C$

Continuité de $E = -\dfrac{\partial V}{\partial r}$ en $r = R$: $\dfrac{B}{R^2} = \dfrac{\rho R}{3\varepsilon_0}$

On en déduit : $B = \dfrac{\rho R^3}{6\varepsilon_0}$ $C = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$

D'où finalement :

$$\begin{cases} \text{pour } r \geqslant R \ : \quad V_{\text{ext}} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \\ \text{pour } r \leqslant R \ : \quad V_{\text{int}} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left[1 - \dfrac{r^2}{3R^2}\right] \end{cases}$$

Ce sont les mêmes expressions que celles obtenues en appliquant le théorème de Gauss.

On pourrait de même retrouver les expressions du champ $\vec{E}(r)$ à partir de la loi de Gauss locale :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{à l'intérieur} \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0 & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

en prenant, par suite de la symétrie sphérique (cf. **1.6.3**)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2 E_r)$$

3.8. RÉCAPITULATION

Les exemples d'application présentés jusqu'ici montrent que la détermination du champ $\vec{E}$ créé par des charges dans le vide peut se faire en suivant trois méthodes différentes :

1) par un calcul direct, en partant de l'expression du champ créé par une charge ponctuelle ou par un élément différentiel de charge, et en la sommant ensuite sur la distribution de charge,

2) en appliquant le théorème de Gauss, si la symétrie de la distribution de charge est élevée (sphérique, cylindrique, plane),

3) en appliquant les équations locales, en tenant compte des conditions aux limites.

On peut résumer les lois locales dans le vide de la manière suivante :

Relation entre champ et potentiel :	$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$
Le champ $\vec{E}$ est irrotationnel :	$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$
Théorème de Gauss :	$\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
Équation de Poisson	$\Delta V + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$
Équation de Laplace (en l'absence de charges) :	$\Delta V = 0$
Conditions de passage entre deux distributions :	$\begin{cases} \vec{E}_{1T} = \vec{E}_{2T} \\ \vec{E}_{2N} - \vec{E}_{1N} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{N}_{12} \end{cases}$

EXERCICES

3.1. Parmi les distributions de charges suivantes, quelles sont celles pour lesquelles on peut appliquer le théorème de Gauss pour le calcul du champ électrique ? Exprimer alors ce champ en précisant sa direction et son sens :

1) fil de longueur ℓ de densité linéique de charge λ.

2) fil infini de densité linéique de charge λ.

3) circonférence de densité linéique de charge λ.

4) disque de densité surfacique de charge σ.

5) plan infini (π) de densité surfacique de charge σ.

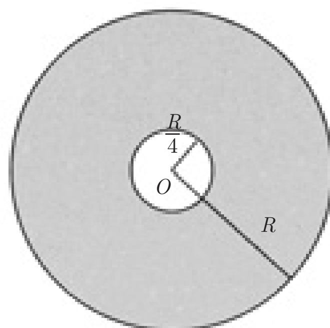
6) sphère de rayon R chargée uniformément :

a) en surface avec une densité surfacique σ ;

b) en volume avec une densité volumique ρ.

Dans le cas de la sphère, donner l'allure des courbes $E(r)$ et $V(r)$.

3.2. *1)* On creuse dans une sphère de centre O_1 et de rayon R une cavité sphérique de même centre O_1 et de rayon $\frac{R}{4}$. Il n'y a pas de charge dans la cavité. Dans le volume sphérique restant, la densité volumique de charges est $\rho_0 = \text{cte} > 0$.



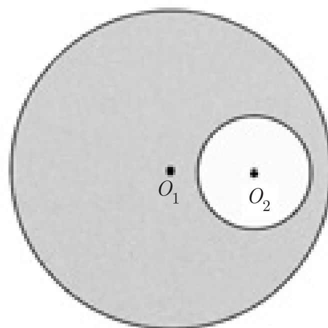
En utilisant le principe de superposition, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ et le potentiel $V(r)$ qui en résulte (en prenant $V(\infty) = 0$) dans les trois cas suivants :

a) $r \leqslant \frac{R}{4}$

b) $\frac{R}{4} \leqslant r \leqslant R$

c) $r \geqslant R$

Donner l'allure des courbes $E(r)$ et $V(r)$.



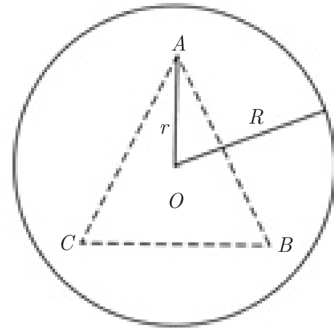
2) La cavité est centrée en O_2 tel que $O_1\,O_2 = \frac{R}{2}$.

Exprimer :

a) le champ en un point M intérieur à la cavité en fonction de $\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1M}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{O_2M}$. Que peut-on en conclure ?

b) Le champ en un point N extérieur à la sphère de rayon R en fonction de $\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1N}$ et $\vec{r}_2 = \overrightarrow{O_2N}$.

3.3. Une sphère de centre O et de rayon R porte une charge $+3q$ ($q > 0$) répartie uniformément dans son volume avec une densité uniforme ρ. À l'intérieur de la sphère se trouvent trois charges ponctuelles, chacune égale à $-q$, placées aux sommets A, B et C d'un triangle équilatéral ayant O comme centre de gravité.



1) Déterminer le champ électrique $\vec{E}_1$ créé en A par les deux charges B et C, en fonction de $r = OA$.

2) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrique $\vec{E}_2$ créé en A par la distribution volumique de charges.

3) En déduire l'expression de r pour que la charge placée en A soit en équilibre.

4) Déterminer le potentiel électrostatique V_1 créé en A par les charges ponctuelles $-q$ placées en B et C. Calculer le potentiel V_2 créé par la distribution volumique de charges sachant que $V_2(0) = 0$. En déduire le potentiel total V_A au point A.

3.4. On considère une certaine distribution de charges positives et négatives à symétrie sphérique de centre O, telle que le potentiel électrique $V(M)$ qu'elle crée en un point M distant de r du point O soit de la forme (potentiel dit écranté) :

$$V(M) = \frac{A}{4\pi\varepsilon_0 r} \exp(-r/a)$$

où A et a sont des constantes positives.

1) Quelles sont les dimensions de A et de a ?

2) Calculer le champ $\vec{E}(M)$ correspondant, en tout point de l'espace (excepté O).

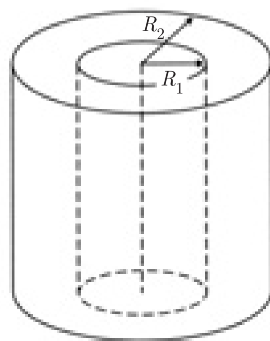
3) À partir de l'expression de ce champ sur une sphère de centre O et de rayon r, déterminer la charge interne $Q(r)$ contenue dans cette sphère. En déduire la charge totale de la distribution.

4) Calculer la densité volumique de charge ρ, à la distance r, en précisant son signe.

5) Montrer qu'au point O, il existe une charge positive finie, dont on précisera la valeur en fonction des données. Quelle est alors l'expression du champ au voisinage de O ?

6) Comment peut-on finalement décrire la distribution de charge proposée ?

3.5. Exprimer le champ électrique créé en tout point de l'espace par une distribution volumique de charge $\rho(>0)$ répartie uniformément entre deux cylindres coaxiaux de longueur infinie de rayons respectifs R_1 et R_2 $(R_1 < R_2)$,



1) en utilisant le théorème de Gauss,

2) à partir de l'équation locale :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

3.6. Une sphère de centre O et de rayon R contient une charge Q répartie uniformément avec une densité volumique $\rho = \dfrac{3Q}{4\pi R^3}$.

1) Exprimer le potentiel en tout point de l'espace en utilisant les équations locales de Laplace et de Poisson.

2) En déduire le champ électrique $\vec{E}(r)$.

3) Retrouver l'expression de $\vec{E}(r)$ en appliquant le théorème de Gauss.

CORRIGÉS

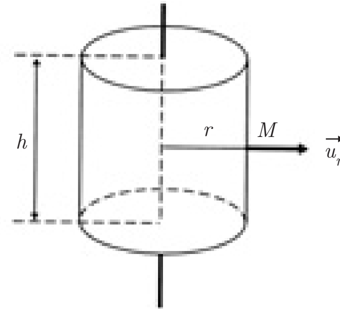
3.1. *1)* Fil de longueur finie : non, on ne peut appliquer le théorème de Gauss.

2) Fil de longueur infinie : oui. Dans ce cas, la surface de Gauss est un cylindre ayant pour axe le fil. Soit h et r respectivement la hauteur et le rayon de ce cylindre, r étant

la distance du fil au point M où l'on calcule le champ électrique. Pour des raisons de symétrie, ce champ est radial. On a :

$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

soit $$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$



$$\left.\begin{array}{ll} \lambda > 0 & \vec{E} \text{ est dans le sens de } \vec{u}_r \\ \lambda < 0 & \vec{E} \text{ est opposé à } \vec{u}_r \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{u}_r$$

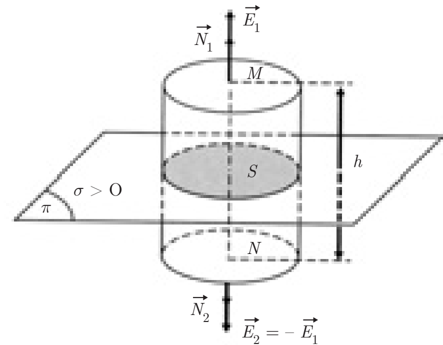
3) Circonférence : non.

4) Disque : non.

5) Plan infini. On peut appliquer le théorème de Gauss : la distribution est invariante par translation quelconque parallèle au plan et V ne dépend donc que de la distance z au plan.

Par conséquent, le champ $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\vec{e}_z$ est perpendiculaire au plan (π).

Tant que le calcul est fait en un point M tel que (π) puisse être considéré comme infini, $\vec{E}$ est uniforme de part de d'autre de π, seul son sens change. En effet, si l'on prend pour surface de Gauss un cylindre de hauteur h et de surface de base S, symétrique par rapport à (π), (voir figure ci-contre), on a :



$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}S = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

d'où : $$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

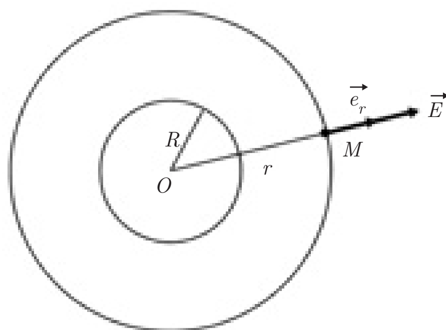
Le sens de $\vec{E}$ indiqué sur la figure correspond à $\sigma > 0$. Les sens de $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ changent si $\sigma < 0$.

6) Dan le cas de la sphère creuse ou pleine, on peut appliquer le théorème de Gauss. Dans les deux cas le champ radial ; centrifuge si σ (ou ρ) > 0, centripète si σ (ou ρ) < 0

Dans les deux cas, la surface de Gauss est une sphère de rayon $r = OM$. On a :

$$\iint \vec{E}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}S = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{N} = \vec{e}_r$$

soit : $$4\pi r^2 E = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$



a) **Sphère chargée en surface** (on suppose $\sigma > 0$) :

si $r > R$:

$$\Sigma q_{\text{int}} = 4\pi R^2 \sigma \quad \Longrightarrow \vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}\vec{e}_r$$

si $r < R$:

$$\Sigma q_{\text{int}} = 0 \quad \Longrightarrow \vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$$

En utilisant la relation $\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$, on trouve :

$$V_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r} + C_1$$

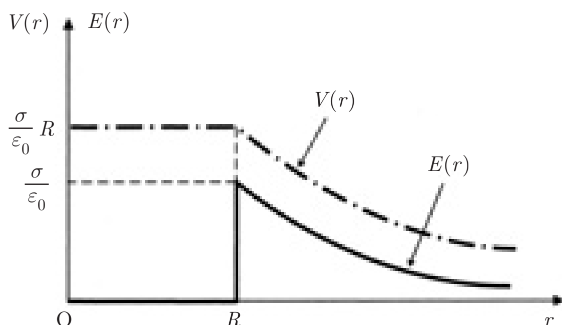
$$V_{\text{ext}}(\infty) = 0 \Longrightarrow C_1 = 0 \Longrightarrow V_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r}$$

$$V_{\text{int}} = C_2$$

La continuité de $V(r)$ sur la surface implique que :

$$V_{\text{int}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}R$$

Allure des courbes $V(r)$ et $E(r)$:



On note une discontinuité de $\vec{E}$, d'une valeur $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, à la traversée de la surface de la sphère.

b) **Sphère chargée en volume** (on suppose $\rho > 0$) :

si $r > R$: $$\Sigma q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\vec{e}_r$$

si $r < R$: $$\Sigma q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \vec{e}_r$$

D'où :

$$V_{\text{ext}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r} + C_1$$

$$V_{\text{ext}}(\infty) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad V_{\text{ext}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r}$$

et $$V_{\text{int}} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{r^2}{2} + C_2$$

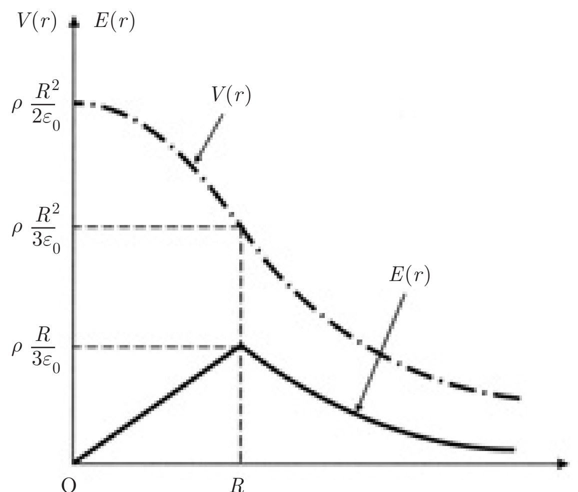
La continuité de $V(r)$ à la traversée de la surface s'écrit :

$$-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 + C_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}R^2$$

$$+C_2 = \frac{3\rho R^2}{6\varepsilon_0}$$

d'où : $$V_{\text{int}} = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

Allure des courbes $V(r)$ et $E(r)$:



On peut noter que, dans ce cas, le champ est continu à la traversée de la surface de la sphère.

On remarque que, aussi bien dans le cas de la sphère chargée en surface que dans le cas de la sphère chargée en volume, le calcul de E_{ext} revient à considérer la charge totale Q portée par la sphère comme placée au centre O de cette sphère.

Cas a) $$E_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2} \qquad Q = 4\pi R^2\sigma$$

$$E_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Cas b) $$E_{\text{ext}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2} \qquad Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$$

$$E_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

3.2. Principe de superposition : En tout point M, le champ est la somme des champs créés l'un par la sphère (O_1, R) portant la charge volumique ρ_0, l'autre par la sphère $\left(O_1, \frac{R}{4}\right)$ portant la charge volumique $-\rho_0$. En utilisant les résultats du cours et en posant $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{O_1M}}{\|\overrightarrow{O_1M}\|}$ on obtient :

	r	$\vec{E}_1$	$\vec{E}_2$	$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$
a)	$r \leqslant \frac{R}{4}$	$\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r$	$-\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r$	$\vec{0}$
b)	$\frac{R}{4} \leqslant r \leqslant R$	$\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r$	$-\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{R}{4}\right)^3\vec{e}_r$	$\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R^3}{64r^2}\right)\vec{e}_r$
c)	$r \geqslant R$	$\frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$	$-\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{R}{4}\right)^3\vec{e}_r$	$\frac{21}{64}\frac{\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 r^2}$

On obtient alors $V(r)$ en utilisant la relation :

$$V(r) = -\int E(r)\,\mathrm{d}r$$

– Pour $r \geqslant R$: $$V(r) = \frac{21}{64}\frac{\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 r} + C_1$$

$$V(\infty) = 0 \implies C_1 = 0$$

– Pour $\frac{R}{4} \leqslant r \leqslant R$: $$V(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 R^3}{192\varepsilon_0 r} + C_2$$

La continuité de $V(r)$ en $r = R$ s'écrit :

$$\frac{21}{64}\frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0} = -\frac{33}{192}\frac{\rho_0 R^2}{\varepsilon_0} + C_2$$

$$C_2 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$$

d'où $$V(r) = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{96}\left(\frac{R}{r}\right) - 1\right)$$

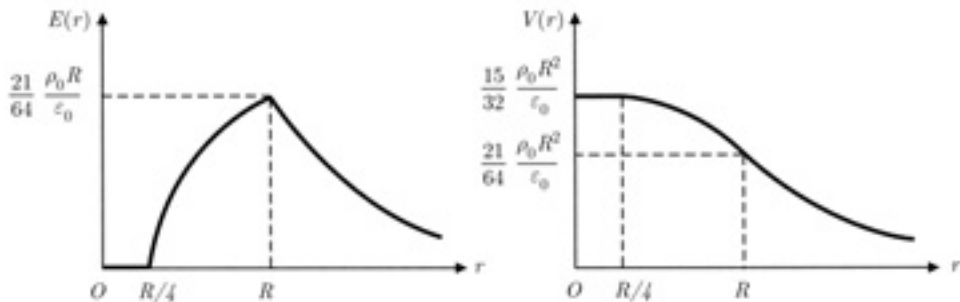
– Pour $r \leqslant \dfrac{R}{4}$: $$V(r) = C_3$$

La continuité de $V(r)$ en $r = \dfrac{R}{4}$:

$$C_3 = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{48} + \frac{1}{24} - 1\right)$$

d'où : $$V(r) = \frac{15\rho_0 R^2}{32\varepsilon_0}$$

Allure des courbes

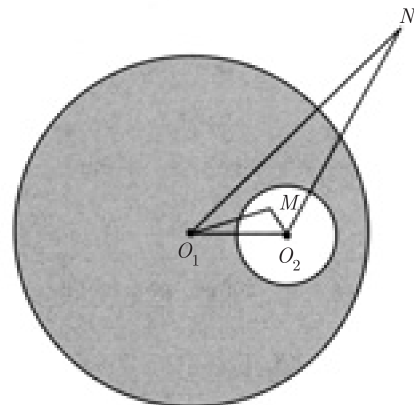


2) En appliquant toujours le principe de superposition :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$$

a) $$\vec{E}_1(M) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{O_2M}$$

et $$\vec{E}_2(M) = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{O_2M}$$



D'où : $$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M})$$

soit : $$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,(\overrightarrow{O_1\,O_2})$$

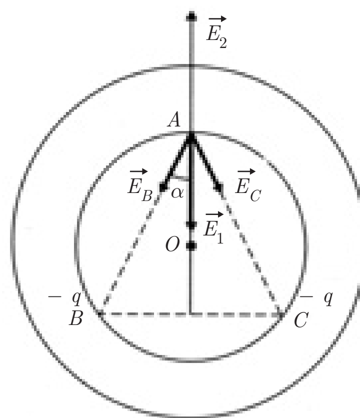
Le champ électrique est uniforme.

b) En utilisant les résultats de la première question (cas *c)*)

$$\vec{E}_1(N) = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R}{r_1}\right)^3 \overrightarrow{O_1N} \quad \text{et} \quad \vec{E}_2(N) = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R}{4r_2}\right)^3 \overrightarrow{O_2N}$$

d'où :
$$\vec{E}(N) = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{O_1N}}{r_1^3} - \frac{\overrightarrow{O_2N}}{64r_2^3}\right)$$

3.3. *1)* Soit $\vec{E}_B$ et $\vec{E}_C$ les champs électriques créés en A par les charges placées respectivement en B et C.
On a successivement :



$$\vec{E}_B = \frac{Kq}{l^2}\vec{u}_{AB}$$

$$\vec{E}_C = \frac{Kq}{l^2}\vec{u}_{AC}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_B + \vec{E}_C = -\frac{2Kq}{l^2}\cos\alpha\vec{i}$$

en désignant par $\vec{i}$ le vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OA}$.

$$OA = OB = OC = r$$

$$AB = BC = CA = l$$

Comme $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $l = r\sqrt{3} \implies \vec{E}_1 = -\dfrac{Kq}{r^2\sqrt{3}}\vec{i}$

2) La distribution volumique créée en n'importe quel point un champ électrique radial. L'application du théorème de Gauss à la sphère de centre O, de rayon r passant par A donne :

$$4\pi r^2 E_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad \text{avec} \quad r \leqslant R$$

La sphère contient la charge totale $+3q$ (sans les trois charges ponctuelles $-q$) donc :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho = 3q \implies \rho = \frac{9q}{4\pi R^3}$$

$$E_2 = 3Kq\frac{r}{R^3} \quad \text{avec} \quad r \leqslant R$$

Le champ $\vec{E}_2$ est radial centrifuge :

$$\vec{E}_2 = 3\,kq\frac{r}{R^3}\vec{i} \quad \text{avec} \quad r \leqslant R$$

3) Le champ total en A est :

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \left(-\frac{Kq}{r^2\sqrt{3}} + \frac{3Kqr}{R^3}\right)\vec{i}$$

Pour que la charge placée en A soit en équilibre, il faut que :

$$\vec{F}_A = -q\vec{E}_A = \vec{0} \implies \vec{E}_A = \vec{0}$$

D'où : $$3r^3\sqrt{3} = R^3 \implies r = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

4) $$V_1 = -\frac{2Kq}{l} = -\frac{2Kq}{r\sqrt{3}}$$

$$V_2 = -\int E\,\mathrm{d}r = -\frac{3Kqr^2}{2R^3} + C$$

Or $$V_2(0) = 0 \implies C = 0$$

On obtient : $$V_A = V_1 + V_2 = -\frac{2Kq}{r\sqrt{3}} - \frac{3Kqr^2}{2R^3}$$

3.4. $$V(M) = \frac{A}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp(-r/a)$$

1) A a les dimensions d'une charge et a d'une longueur

2) $$\vec{E}_{(M)} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$$

$$E(M) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{KA}{r}\exp(-r/a)\right]$$

$$= KA\frac{1}{r^2}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\exp(-r/a)$$

3) Théorème de Gauss, appliqué à une sphère de centre O et de rayon r :

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint_{\text{sphère}} \vec{E}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}S = E\,4\pi r^2$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi\varepsilon_0 r^2 E \\ &= A\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp(-r/a) > 0 \end{aligned}$$

La charge totale de la distribution correspond à la valeur de Q lorsque $r \longrightarrow \infty$. On trouve :

$$Q_{\text{totale}} = 0$$

4) Densité volumique de charge à la distance r. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \rho(r)4\pi r^2\,\mathrm{d}r &= \mathrm{d}Q \\ &= A\exp(-r/a)\left[-\frac{1}{a}\left(1+\frac{r}{a}\right)+\frac{1}{a}\right] \\ &= -A\frac{r}{a^2}\exp(-r/a) \\ \rho(r) &= -\frac{A}{4\pi a^2}\frac{1}{r}\exp(-r/a) < 0 \end{aligned}$$

5) On a : $$Q = A\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{r}{a}\right)$$

Lorsque $r \longrightarrow 0 \qquad Q \longrightarrow A > 0$

Au voisinage de 0, le champ $\vec{E}$ devient :

$$E(M) = \frac{KA}{r^2}$$

Tout se passe comme si on avait une charge ponctuelle $Q_0 = A > 0$ placée au point O.

6) La distribution de charge proposée est équivalente à :

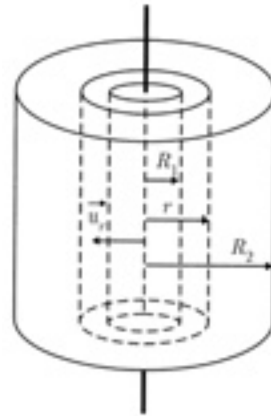
– une charge ponctuelle $Q_0 = A$ positive placée en O ;

– une charge négative $-A$ répartie dans tout l'espace avec la densité volumique :

$$\rho(r) = -\frac{A}{4\pi a^2}\frac{1}{r}\exp(-r/a)$$

– la distribution dans son ensemble est neutre.

3.5. Pour des raisons de symétrie (voir exemple 1), le champ électrique $\vec{E}$ est radial. La charge volumique ρ étant positive, ce champ sera centrifuge.



1) **Application du théorème de Gauss :**

$$\int_{(S)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

La symétrie cylindrique de la distribution impose de prendre pour surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h. On a :

a) $r < R_1$:

$$\Sigma q_{\text{int}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = \vec{0}$$

b) $R_1 < r < R_2$:

$$2\pi r h E = \pi(r^2 - R_1^2)h\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\vec{u}_r$$

c) $r > R_2$:

Cette fois, on a :

$$2\pi r h E = \pi(R_2^2 - R_1^2)h\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}(R_2^2 - R_1^2)\vec{u}_r$$

2) **Utilisation de l'équation locale :**

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

En coordonnées cylindriques, pour un champ électrique radial, on a :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rE_r)$$

a) $r < R_1$ (pas de charges) :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \Longrightarrow rE_r = A(\text{cte})$$

$$E_r(r = 0) = 0 \Longrightarrow A = 0 \Longrightarrow \vec{E} = \vec{0}$$

b) $R_1 < r < R_2$:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rE_r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rE_r) = \frac{\rho r}{\varepsilon_0}$$

$$rE_r = \frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0} + B \Longrightarrow E_r = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} + \frac{B}{r}$$

La continuité du champ en $r = R_1$ implique que :

$$\frac{\rho R_1}{2\varepsilon_0} + \frac{B}{R_1} = 0 \Longrightarrow B = -\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\vec{e}_r$$

c) $r > R_2$:

On a de nouveau

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \Longrightarrow rE_r = C$$

Écrivons la continuité de $\vec{E}$ en $r = R_2$:

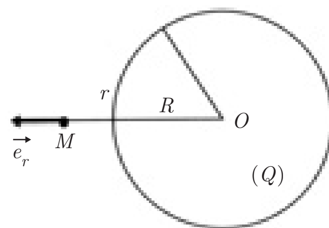
$$\frac{\rho R_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 R_2} = \frac{C}{R_2} \Longrightarrow C = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2)$$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}(R_2^2 - R_1^2)\vec{e}_r$$

3.6. La distribution étant de symétrie sphérique, le potentiel V et le champ électrique $\vec{E}$ ne dépendront que de r.

En coordonnées sphériques, le laplacien se réduit à :

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right)$$



1) Calcul du potentiel $V(r)$:

a) pour $r < R$: $\rho = \mathrm{Cte}$.

L'équation de Poisson s'écrit :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Longrightarrow r^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} + A$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} + \frac{A}{r^2}$$

En $r = 0$, par symétrie :

$$\vec{E} = \vec{0} \Longrightarrow \left(\frac{dV}{dr}\right)_{r=0} = 0$$

Donc $A = 0$. Par suite :

$$V(0 < r < R) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + B$$

où la constante B sera déterminée ultérieurement.

b) pour $r > R$ on a $\rho = 0$ et l'équation de Laplace s'écrit :

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0$$

D'où l'on tire successivement :

$$r^2\frac{dV}{dr} = C$$

$$V = -\frac{C}{r} + D$$

$$V(\infty) = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = 0$$

Par suite :
$$V(r > R) = -\frac{C}{r}$$

Détermination des constantes B et C :

Le potentiel et le champ électriques sont continus pour $r = R$. On a donc d'une part :

$$-\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} + B = -\frac{C}{R} \tag{1}$$

et d'autre part :

$$-\frac{\rho R}{3\varepsilon_0} = \frac{C}{R^2} \tag{2}$$

L'équation (2) donne :
$$C = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}$$

L'équation (1) donne :
$$B = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

Finalement puisque $\rho = \dfrac{3Q}{4\pi R^3}$, on obtient :

• pour $r \leqslant R$: $$V(r) = \frac{KQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

• pour $r \geqslant R$: $$V(r) = \frac{KQ}{r}$$

Dans ce dernier cas, tout se passe comme si toute la charge Q était placée au point O.

2) Le champ électrique $\vec{E}(r)$ est donnée par :

$$\vec{E}(r) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$$

On obtient :

• pour $r \leqslant R$: $$\vec{E}(r) = \frac{KQr}{R^3}\vec{e}_r$$

• pour $r \geqslant R$: $$\vec{E}(r) = \frac{KQ}{r^2}\vec{e}_r$$

3) En appliquant le théorème de Gauss :

$$\int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

où la surface de Gauss S est la sphère (O,r) sur laquelle se trouve le point où l'on calcule le champ $\vec{E}(r)$.

a) pour $r < R$:

$$Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r = \frac{KQr}{R^3}\vec{e}_r$$

b) pour $r > R$:

$$Q_{\text{int}} = Q \quad \Longrightarrow \quad \vec{E} = \frac{KQ}{r^2}\vec{e}_r$$

On retrouve bien les mêmes résultats.

4

Conducteurs en équilibre

4.1. LOI DE CONSERVATION DE LA CHARGE

Les conducteurs sont des milieux dans lesquels existent des charges libres (positives ou négatives) pouvant être mises en mouvement sous l'action d'un champ électrique.
Parmi les conducteurs, on peut citer les métaux, les semiconducteurs, les électrolytes ou encore les gaz ionisés.
À l'intérieur d'un système isolé constitué par plusieurs conducteurs, des déplacements de charges peuvent s'opérer :

– par frottement de corps non chargés préalablement,

– par contact de deux corps, si l'un des deux corps ou les deux sont chargés initialement,

– par l'influence de corps chargés sur un corps isolé placé en leur voisinage.

Énoncé de la loi

Dans un *système isolé*, la charge électrique se conserve :

$$\Sigma q = 0$$

Par exemple, un atome non ionisé se comporte comme une particule électriquement neutre.

4.2. CORPS CONDUCTEURS ET CORPS ISOLANTS

Un corps quelconque, isolé, contient un certain nombre de porteurs de charges : ce sont les protons liés aux noyaux des atomes et les électrons qui gravitent autour des noyaux.

Lorsque certains électrons sont « libres », c'est-à-dire très faiblement liés à leurs atomes d'origine, ils constituent un « gaz d'électrons » susceptible de se déplacer sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'acquérir une vitesse moyenne :

$$\langle \vec{v} \rangle = \mu \vec{E}$$

où μ est la *mobilité* des porteurs libres. Ainsi, dans les métaux, on admet qu'en moyenne un électron se trouve libéré pour chaque atome, le nombre d'atomes par cm^3 étant de l'ordre de 10^{23}.
Les isolants ou diélectriques peuvent être définis grossièrement comme des corps ne possédant pratiquement pas de charges libres. Il en résulte une conductivité très faible, ce qui correspond à une résistance très élevée (voir chapitre **6**).

4.3 ÉQUILIBRE ÉLECTROSTATIQUE : THÉORÈME DE COULOMB

On définit la condition d'équilibre d'un conducteur comme impliquant l'immobilité des charges contenues à l'intérieur de ce conducteur.
Cela a pour conséquence qu'en tout point intérieur au corps, le champ $\vec{E}_{\text{int}}$ est nul (de sorte que $\vec{E}_{\text{int}} = q\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$).

L'équation locale : $$\text{div}\,\vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

entraîne que l'équilibre s'exprime finalement par :

$$\boxed{\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0} \qquad \rho_{\text{int}} = 0} \tag{4.1}$$

Il ne peut y avoir de charges libres à l'intérieur d'un conducteur en équilibre et le champ électrique *à l'intérieur* y est toujours nul.
Deux cas peuvent se présenter suivant que le corps est neutre ou chargé.



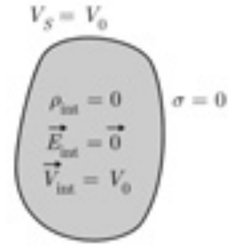
■ Corps conducteur neutre

– On a :

$$\rho_{\text{int}} = 0 \text{ (en volume)} \qquad \sigma = 0 \text{ (en surface)}$$

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad V_{\text{int}} = \text{cte} = V_0$$

– Le volume occupé par la matière conductrice est un volume équipotentiel, et la surface qui le limite est au même potentiel.



– $\overrightarrow{\text{grad}}\, V_{\text{int}} = \vec{0} \implies \Delta V_{\text{int}} = 0$

L'équation de Laplace, valable dans l'espace vide où $\rho = 0$, est donc applicable aux conducteurs en équilibre.

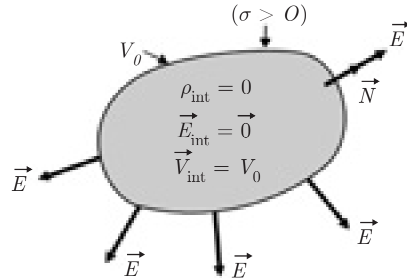
– À l'extérieur du corps, le théorème de Gauss entraîne que $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0}$.

■ Corps conducteur chargé

La condition d'équilibre des porteurs de charge entraîne toujours :

$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$ d'où $\rho_i = \varepsilon_0 \text{ div } \vec{E} = \vec{0}$ d'une part et $V_{\text{int}} = \text{cte} = V_0$ d'autre part.

La charge ne peut se répartir que sur la surface, celle-ci est une surface équipotentielle.



Les conditions de passage du champ $\vec{E}$ à travers la surface donnent :

a) $\vec{E}_{T\text{ ext}} = \vec{E}_{T\text{ int}} = \vec{0}$

Par conséquent, au voisinage de la surface, $\vec{E}$ ne peut être que normal à la surface.

b) $(\vec{E}_{\text{ext}} - \vec{E}_{\text{int}}) \cdot \vec{N} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

où $\vec{N}$ est le vecteur unitaire de la normale sortante.

Comme $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$, on a :

$$\boxed{\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{N}} \tag{4.2}$$

Si $\sigma > 0$, le champ est dirigé vers l'extérieur,

si $\sigma < 0$, il est dirigé vers l'intérieur.

Cette relation, qui traduit que les lignes de champ sont normales à la surface du conducteur, constitue le *théorème de Coulomb*.

■ Conséquences

– Dans le cas d'un conducteur sphérique chargé, le champ sur la surface a pour expression :

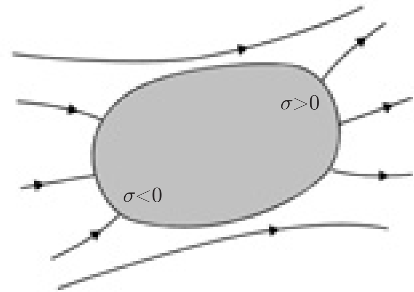
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}\vec{e}_r$$

comme si la charge Q était placée au centre de la sphère.

– Comme $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2}$, on en déduit que, pour une charge Q donnée, la densité surfacique σ est d'autant plus élevée que le rayon de courbure est petit (pouvoir des pointes : sur une pointe, σ et par conséquent le champ $\vec{E}$ peuvent atteindre des valeurs très élevées).

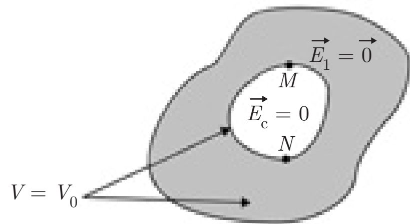
Exemple d'application : parafoudre à éclateurs où le champ très intense sur les pointes peut ioniser les molécules de l'air environnant, contribuant à l'écoulement des charges accumulées.

– Un conducteur placé dans un champ uniforme $\vec{E}$ aura tendance à perturber les lignes de champ de $\vec{E}$ de manière que celles-ci soient normales à sa surface.



Sur cette surface, il y aura apparition de $\sigma < 0$ aux points où aboutissent les lignes de champ, et de $\sigma' > 0$ aux points d'où elles repartent.

– Dans le cas d'un conducteur présentant une cavité, que le corps soit chargé ou non, que le champ extérieur soit nul ou non, la surface du conducteur (externe ou interne) est une équipotentielle $V = V_0$.



On en déduit que les points M et N pris sur la surface interne sont au même potentiel :

$$V_M - V_N = -\int_{\widehat{MN}} \vec{E}_{\text{cavité}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0 \Longrightarrow \vec{E}_{\text{cavité}} = \vec{0}$$

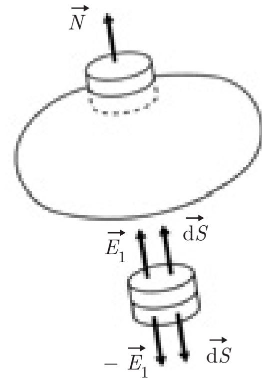


Le champ est nul dans la cavité, comme il l'est dans la partie massive du conducteur, et cela, quelles que soient les conditions extérieures au conducteur. Ce dernier constitue un écran électrostatique : tout champ extérieur ne peut être décelé dans la cavité. On peut montrer que, inversement, tout

champ appliqué dans la cavité, ne sera pas décelé à l'extérieur du conducteur.

Application : Cage de Faraday : cage métallique permettant d'effectuer des mesures, en étant à l'abri des champs extérieurs, ou inversement, sans perturber les expériences extérieures.

4.4. PRESSION ÉLECTROSTATIQUE



Soit dS un élément de surface sur un conducteur chargé d'une densité surfacique σ.
Le théorème de Gauss appliqué au cylindre élémentaire indiqué sur la figure donne :

$$E_1\,\mathrm{d}S + E_1\,\mathrm{d}S = \frac{\sigma \mathrm{d}S}{\varepsilon_0}$$

Le champ extérieur créé par l'élément dS seul est donc :

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{N}$$

Or le champ extérieur au voisinage de dS pris sur le conducteur chargé est selon (4.2) $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{N}$

On en déduit que le champ créé par le reste du conducteur (conducteur privé de dS) est :

$$\vec{E}_2 = \vec{E} - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\vec{N}$$

L'élément σ dS « ne voyant pas » son propre champ, ne subit que l'action du champ $\vec{E}_2$. Il en résulte une force :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \sigma\,\mathrm{d}S\,\vec{E}_2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{d}S\,\vec{N}$$

On peut ainsi définir une pression électrostatique s'exerçant en tout point de la surface du conducteur chargé :

$$\boxed{p = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}} \qquad (4.3)$$

ou encore
$$\boxed{p = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2} \qquad (4.4)$$

où E est la norme du champ à la surface du conducteur.

$\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ est toujours normale à la surface du conducteur, et dirigée vers l'extérieur, quel que soit le signe de la charge.

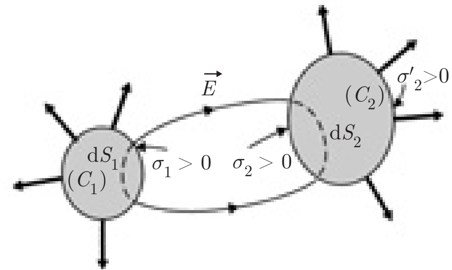


4.5. INFLUENCE DE DEUX CONDUCTEURS CHARGÉS. THÉORÈME DE FARADAY

4.5.1 Influence partielle

Soit deux conducteurs (C_1) et (C_2). On suppose que, initialement (C_1) est chargé avec une densité $\sigma_1 > 0$, et C_2 est neutre.

Dès que l'on approche (C_1) de (C_2), il apparaît sur la surface de (C_2) : une densité de charge $\sigma'_2 < 0$ sur la partie faisant face à (C_1) et une densité $\sigma'_2 > 0$ sur la partie opposée. Les densités sont de signes contraires pour assurer la neutralité de (C_2). Les lignes de champ ont l'allure indiquée sur la figure : elles partent de (C_1) perpendiculaires à la surface et aboutissent à (C_2) également perpendiculaires à la surface.



On considère le tube de champ de section $\mathrm{d}S_1$ sur (C_1) : il va délimiter sur (C_2) une section $\mathrm{d}S_2$. Le flux sortant de ce tube est nul, car aucun flux ne sort de la paroi latérale ($\vec{E}$ tangent à la paroi) ni des calottes $\mathrm{d}S_1$, $\mathrm{d}S_2$ ($\vec{E}$ nul à l'intérieur des conducteurs).

Le théorème de Gauss appliqué à ce tube donne :

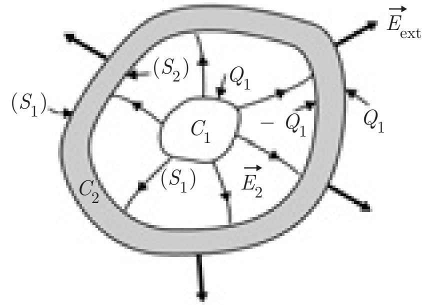
$$\oiint_{(\text{tube})} \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0 = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

soit : $$\Sigma q_i = \sigma_2\,\mathrm{d}S_1 + \sigma_1\,\mathrm{d}S_2 = 0$$

Les charges $\sigma_1 \, dS_1$ et $\sigma_2 \, dS_2$ qui se font face sur deux éléments de surface correspondants sont égales et opposées (théorème de Faraday).
L'influence est dite partielle car seule une partie des lignes de champ issues de (C_1) aboutit à (C_2).

4.5.2 Influence totale

Si l'un des deux corps (C_2 par exemple) entoure totalement l'autre, il y a correspondance totale entre les charges de la surface (S_1) de (C_1) et la surface interne (S_2) de (C_2).
On peut alors écrire :



$$Q_1 = \int_{(S_1)} \sigma_1 \, dS_1 = -\int_{(S_2)} \sigma_2 \, dS_2$$

Les charges globales portées par les deux surfaces en regard sont égales et opposées.
On peut donc résumer la situation de la manière suivante :

– dans la partie massive de (C_1) : $\vec{E}_1 = \vec{0}$,

– sur la surface de (C_1) : charge $Q_1 > 0$ créant $\vec{E}_2$,

– sur la surface interne de (C_2) : charge $-Q_1$,

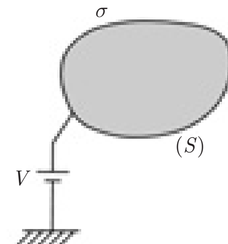
– dans la partie massive de (C_2) : $\vec{E} = \vec{0}$,

– sur la surface externe de (C_2) : apparition de la charge $+Q_1$ pour assurer la neutralité de (C_2) (si l'on suppose (C_2) neutre au départ),

– à l'extérieur des deux conducteurs : le champ $\vec{E}_{\text{ext}}$ est celui créé par la seule charge Q_1 portée par la surface externe de (C_2).

4.6. CAPACITÉ D'UN CONDUCTEUR UNIQUE

Soit un conducteur porté au potentiel V. Il apparaît alors sur sa surface, une charge q définie par :



$$q = \oiint_{(S)} \sigma \, dS$$

Si le potentiel devient V_1, puis V_2, puis V_3, la charge devient q_1, q_2, q_3. Les relations charge-

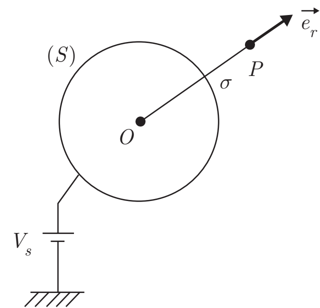
potentiel étant linéaires (par exemple, l'équation locale $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ est linéaire car si on multiplie ρ par un facteur A, le potentiel sera lui aussi multiplié par A), on peut écrire :

$$\frac{q}{V} = \frac{q_1}{V_1} = \frac{q_2}{V_2} = \frac{q_3}{V_3} = C$$

Le coefficient de proportionnalité C, indépendant de q et de V, est appelé la *capacité* du corps conducteur. Il se mesure en farad (F), si q est en coulomb et V en volt.

Exemple 1. Capacité d'une sphère conductrice de rayon R

Supposons que la sphère est portée au potentiel V_S :



au point P, on a :

$$\vec{E} = K\frac{Q}{(OP)^2}\vec{e}_r \quad V = \frac{KQ}{OP}$$

et sur la surface :

$$V_S = K\frac{Q}{R}$$

On en déduit, avec $K = 1/4\pi\varepsilon_0$:

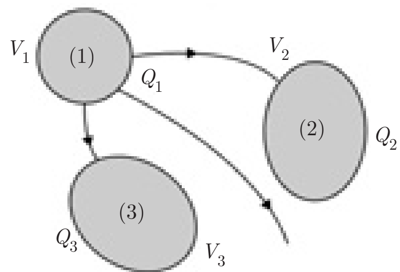
$$C = \frac{Q}{V_S} = \frac{R}{K}$$

soit :

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R} \quad (4.5)$$

4.7. SYSTÈME DE *n* CONDUCTEURS EN ÉQUILIBRE

Pour simplifier, on se limite à un système de trois conducteurs. Il s'agit de trouver les relations entre les charges et les potentiels des différents conducteurs.
Pour cela, on définit trois états d'équilibre auxquels on applique ensuite le principe de superposition.



1[er] état : conducteur n° 1 au potentiel $V_1 > 0$ par exemple, les autres au potentiel 0.

2[e] état : conducteur n° 2 au potentiel V_2, les autres au potentiel 0.

3[e] état : conducteur n° 3 au potentiel V_3, les autres au potentiel 0.

1[er] état : Q_{11}, Q_{21}, Q_{31} étant les charges portées respectivement par les conducteurs 1, 2, 3, on a :

$$Q_{11} = C_{11}V_1 \qquad C_{11} > 0$$

$$Q_{21} = C_{21}V_1 \qquad C_{21} < 0 \quad \text{car charge } Q_{21} < 0$$

$$Q_{31} = C_{31}V_1 \qquad C_{31} < 0 \quad \text{car charge } Q_{31} < 0$$

avec $|C_{21} + C_{31}| \leqslant C_{11}$ (influence partielle)

2[e] état :

$$Q_{12} = C_{12}V_2$$

$$Q_{22} = C_{22}V_2$$

$$Q_{32} = C_{32}V_2$$

3[e] état :

$$Q_{13} = C_{13}V_3$$

$$Q_{23} = C_{23}V_3$$

$$Q_{33} = C_{33}V_3$$

Superposition des potentiels :

$$V_1 + 0 + 0 = V_1$$

$$0 + V_2 + 0 = V_2$$

$$0 + 0 + V_3 = V_3$$

Superposition des charges :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + C_{13}V_3$$

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + C_{23}V_3$$

$$Q_3 = C_{31}V_1 + C_{32}V_2 + C_{33}V_3$$

La relation entre charges et potentiels est une relation matricielle. La matrice C ainsi définie, soit :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

constitue la matrice des coefficients d'influence du système des trois conducteurs.
On peut généraliser la relation entre charges et potentiels à un système de n conducteurs. Sous forme matricielle, cette relation s'écrit :

$$[Q_i] = [C_{ij}][V_j] \qquad (4.6)$$

où les indices i et j varient entre 1 et n. Cette écriture signifie que, pour chaque valeur de i, il faut sommer cette expression sur j.

Propriétés de la matrice C :

– elle est symétrique : $C_{ij} = C_{ji}$ (identité de Gauss),

– les termes diagonaux sont positifs : $C_{ii} > 0$, ils constituent les coefficients de capacité,

– les termes non diagonaux sont négatifs : $C_{ij} < 0$, ce sont les coefficients d'influence.

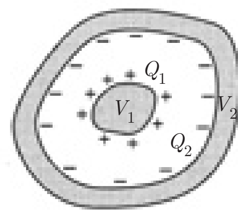
■ **Cas particulier d'un système de deux conducteurs en influence totale**

On a : $Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$

$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$ avec $C_{21} = C_{12}$

Si le corps (2) entoure le corps (1), l'influence est totale, on a alors :

$$Q_2 = -Q_1 \Longrightarrow C_{12}V_1 + C_{22}V_2 = -C_{11}V_1 - C_{12}V_{22}$$



quels que soient V_1 et V_2.
On en déduit :
$C_{11} = C_{22} = -C_{12}$
En posant $C_{11} = C$, on peut écrire :

$$Q_1 = C(V_1 - V_2) \qquad (4.7)$$
$$Q_2 = C(V_2 - V_1)$$

Le système constitue un *condensateur* et C représente sa capacité.



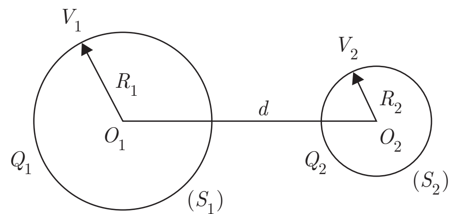
Dans la recherche des coefficients d'influence d'un système de conducteurs, il arrive que les équations soient plus faciles à écrire en exprimant les potentiels en fonction des charges $V = f(Q_i)$, plutôt que les charges en fonction des potentiels $Q = g(V_i)$. On arrive à une relation matricielle de la forme :

$$[V_i] = [D_{ij}][Q_j]$$

où la matrice D est la matrice inverse de la matrice C des coefficients d'influence. Pour obtenir ces derniers, il suffira donc d'inverser la matrice D, opération qui sera précisée dans l'exercice 7, où l'on considère le cas d'un système de trois sphères conductrices.

Exemple 2. Sphères conductrices en influence

Soit deux sphères conductrices chargées, de rayons R_1 et R_2, dont les centres sont distants de d, tel que $d \gg R_1, R_2$. On demande de calculer les coefficients de capacité C_{11}, C_{22} et les coefficients d'influence C_{12} et C_{21} d'un tel système.



La superposition des états d'équilibre permet d'écrire :

$$\begin{cases} V_1 &= D_{11}Q_1 + D_{12}Q_2 \\ V_2 &= D_{21}Q_1 + D_{22}Q_2 \end{cases}$$

La distance d étant très grande comparée à R_1 et R_2, on peut assimiler le potentiel de (S_1) dû à (S_2) au potentiel créé par (S_2) au centre O_1, soit $\dfrac{KQ_2}{d}$.

En faisant de même pour le potentiel de (S_2) dû à (S_1), on peut écrire :

$$\begin{cases} V_1 &= \dfrac{KQ_1}{R_1} + \dfrac{KQ_2}{d} \\ V_2 &= \dfrac{KQ_1}{d} + \dfrac{KQ_2}{R_2} \end{cases} \Longrightarrow D = K \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1} & \dfrac{1}{d} \\ \dfrac{1}{d} & \dfrac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

La matrice C des coefficients de capacité et d'influence est alors obtenue en prenant l'inverse de la matrice D. On trouve :

$$C_{11} = \frac{R_1/K}{1 - R_1R_2/d^2} \qquad C_{22} = \frac{R_2/K}{1 - R_1R_2/d^2}$$

$$C_{12} = C_{21} = \frac{-R_1R_2/K}{d(1 - R_1R_2/d^2)}$$

On vérifie bien que :

– la matrice C est symétrique : $C_{12} = C_{21}$,

– C_{11} et C_{22} sont positifs.

– C_{12} et C_{21} sont négatifs.

En faisant tendre d vers l'infini, on retrouve la capacité de la sphère S_1 seule, soit :

$$C_{11} = 4\pi\varepsilon_0 R_1$$

4.8. CAPACITÉ D'UN CONDENSATEUR

À partir de la relation (4.7), soit :

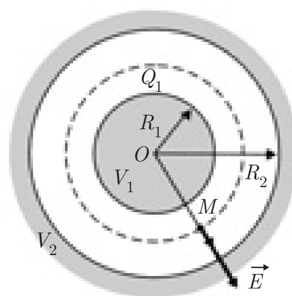
$$\boxed{C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{-Q}{V_2 - V_1}} \qquad (4.8)$$

on voit que la connaissance de la charge Q_1 (ou Q_2) et de la différence de potentiel (d.d.p.) $(V_1 - V_2)$ permet de déterminer la capacité C du condensateur.

Lorsque des considérations de symétrie permettent d'appliquer le théorème de Gauss, le calcul de la capacité C peut se faire très aisément.

■ Condensateur sphérique

Les deux armatures du condensateur sont deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2.



Pour un point M, situé entre les deux armatures et tel que $OM = r$, on peut écrire :

$$\vec{E} = K\frac{Q_1}{r^2}\vec{e}_r$$

$$\mathrm{d}V = -E\,\mathrm{d}r \quad \Longrightarrow \quad V = K\frac{Q_1}{r} + \mathrm{Cte}$$

La d.d.p. entre les deux armatures est donc :

$$V_1 - V_2 = kQ_1 \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

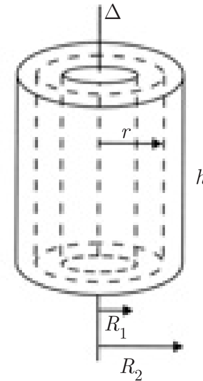
et comme $C = \dfrac{Q_1}{V_1 - V_2}$ il vient :

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{4.9}$$



Le conducteur sphérique de rayon R_1 pris tout seul, peut être considéré comme une armature d'un condensateur sphérique dont la deuxième armature de rayon R_2 est rejetée à l'infini. En faisant tendre R_2 vers l'infini dans l'expression précédente, on retrouve bien la capacité d'un conducteur sphérique $C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$ donnée par (4.5).

■ Condensateur cylindrique



Les armatures sont constituées par deux cylindres coaxiaux. Entre ces deux armatures, le théorème de Gauss permet d'écrire :

$$E\ 2\pi r h = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 r h}\vec{e}_r$$

On en déduit :

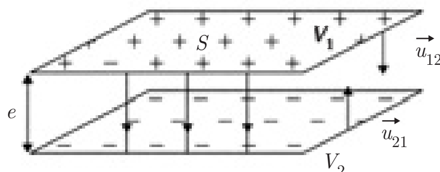
$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

D'où la capacité :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}} \tag{4.10}$$

■ Condensateur plan

Les armatures sont constituées par deux plans parallèles de surface S, distants de e.



Supposons que la première est chargée positivement d'une densité $+\sigma$ et la deuxième négativement d'une densité $-\sigma$. Entre les deux armatures, on a :

$\vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_{12}$ pour la 1re armature,

$\vec{E}_2 = \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_{21}$ pour la deuxième.

Le champ total est donc :

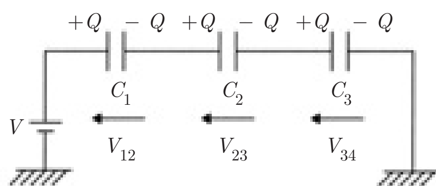
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_{12}$$

On en déduit : $$V_1 - V_2 = Ee = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0} = \frac{Qe}{S\varepsilon_0}$$

D'où : $$\boxed{C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}} \qquad (4.11)$$

4.9. ASSOCIATION DE CONDENSATEURS

4.9.1 Association en série



La charge Q se conserve : toutes les armatures de rang impair portent la même charge $+Q$, toutes les armatures de rang pair la même charge $-Q$:

$$Q = C_1V_{12} = C_2V_{23} = C_3V_{34}$$

Les d.d.p. s'ajoutent pour donner V :

$$V_{12} + V_{23} + V_{34} = V$$

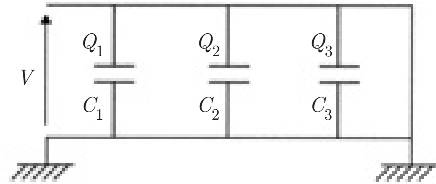
On en déduit : $$\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = V = \frac{Q}{C}$$

La capacité équivalente est donc donnée par :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

4.9.2 Association en parallèle

La d.d.p. se conserve ; elle est commune à tous les condensateurs :



$$\begin{cases} Q_1 &= C_1 V \\ Q_2 &= C_2 V \\ Q_3 &= C_3 V \end{cases}$$

Les charges se répartissent différemment, l'ensemble donnant la charge $Q = CV$.

On en déduit : $$C_1 V + C_2 V + C_3 V = CV$$

D'où la capacité équivalente :

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

4.10. MÉTHODES DE RÉSOLUTION

Une méthode générale de résolution de problèmes électrostatiques en présence de conducteurs, consiste à résoudre l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, dans le vide entourant le conducteur, en tenant compte des conditions aux limites qui sont généralement : potentiel nul à l'infini et potentiel fixé sur le conducteur lui-même. Cette méthode repose sur le *théorème d'unicité*, qui exprime que la solution de l'équation de Laplace vérifiant les conditions aux limites données est unique.
Il existe des techniques théoriques ou expérimentales qui permettent de résoudre l'équation de Laplace. L'exposé de ces techniques sort du cadre de cet ouvrage.
En dehors du cas général, lorsque les conducteurs ont des formes simples, on peut utiliser les mêmes méthodes que dans le cas des distributions de charges dans le vide, à savoir :

– en partant des expressions élémentaires $\mathrm{d}\vec{E}$ et $\mathrm{d}V$ relatives à une charge $\mathrm{d}q$ et en les intégrant sur la surface des conducteurs,

– en appliquant le théorème de Gauss si des symétries favorables se présentent,

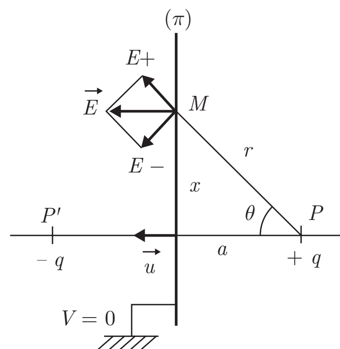
– en utilisant le principe de superposition des états d'équilibre (voir paragraphe 7).

On peut parfois utiliser une méthode dite méthode des images : elle consiste à associer au problème A un problème B, sachant que les problèmes $A + B$ et A ont une solution commune dans la région de l'espace concernée, et que $A + B$ sera plus facile à résoudre.

Exemple 3. La méthode des images

On considère un plan conducteur (π), relié au sol, et soumis à l'influence d'une charge ponctuelle $+q$ placée au point P. On demande de déterminer la densité de charge σ apparaissant sur (π), ainsi que la force d'attraction entre $+q$ et (π).

Le problème A étant défini ainsi : (charge $+q$ placée en P, plan conducteur (π) au potentiel nul), il faut trouver un problème B qui, associé à A, donne un potentiel nul sur le plan (π).



La solution est évidente : une charge $-q$ placée en P', symétrique de P par rapport à (π), qui sera associée à $+q$ en P en l'absence du plan conducteur : l'ensemble des deux charges donnera bien un potentiel nul sur le plan (π). On dit que la charge $-q$ placée en P' est l'image de la charge $+q$ placée en P par rapport au plan (π).

L'introduction de cette image facilite le calcul. En effet, le champ $\vec{E}$ en tout point de (π) s'obtient par :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 2E_+ \cos\theta\, \vec{u}$$

$$E = 2K\frac{q}{r^2}\,\frac{a}{r} = \frac{aq}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \qquad \text{avec} \qquad r = \sqrt{a^2 + x^2}$$

Théorème de Coulomb :

$$\sigma = \varepsilon_0 E \quad \Longrightarrow \quad \sigma = \frac{aq}{2\pi r^3}$$

La force exercée par le plan conducteur (π) sur la charge q est égale à la force exercée par l'image $-q$ sur la charge q

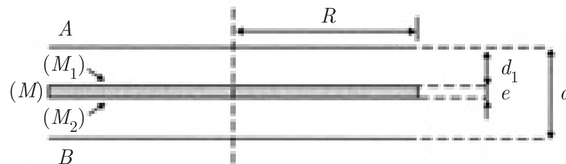
On trouve : $$\vec{F} = K\frac{q^2}{(2a)^2}\vec{u}$$

EXERCICES

4.1. Deux disques métalliques A et B de rayon $R = 0{,}3$ m, distants de $d = 2{,}5$ m, constituent les armatures d'un condensateur plan (P).

1) Quelles sont la capacité C et la charge Q de ce condensateur quand il est soumis à une différence de potentiel $V_A - V_B = 500$ V ?

2) On isole le condensateur (P). Une feuille métallique circulaire (M) initialement neutre, de même rayon $R = 0{,}3$ m et d'épaisseur $e = 1$ mm est alors introduite dans le condensateur, parallèlement aux armatures, à la distance d_1, du disque A.



Quelles sont les charges portées par les deux faces (M_1) et (M_2) de la feuille métallique ?

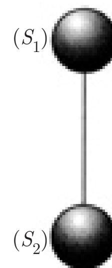
3) Quelle est la force électrostatique résultante agissant sur (M) ?

4) Calculer la capacité C' du condensateur équivalent à l'ensemble $(P) + (M)$. En déduire la nouvelle d.d.p. $V'_A - V'_B$ entre les armatures A et B.

4.2. Une sphère métallique (S_1) de rayon $R_1 = 9$ cm porte la charge positive $Q_1 = 10^{-8}C$.

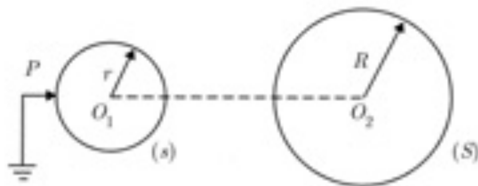
1) Quels sont la capacité C_1 et le potentiel V_1 de (S_1) ?

2) On relie (S_1) à une autre sphère métallique (S_2) de rayon $R_2 = 1$ cm, par un fil conducteur long et fin. (S_2) est suffisamment éloigné de (S_1) pour négliger l'influence mutuelle de (S_1) et (S_2). Les charges superficielles sur le fil fin sont supposées négligeables.



Calculer, à l'équilibre, les charges Q'_1 et Q'_2 portées par les deux sphères et la valeur du champ électrique au voisinage de chaque sphère.

4.3. Une sphère s conductrice de rayon r, de centre O_1, est au contact d'une pointe P reliée au sol (potentiel nul). On place une sphère conductrice S fixe portant une charge Q, de rayon R, de centre O_2, de façon que P, O_1 et O_2 soient alignés. On pose $O_1O_2 = a$.



On amène la sphère mobile (s) au contact de la sphère (S), puis au contact de P, et de nouveau au contact de (S), puis de P, etc.

1) Au départ s est au contact de P. Calculer la charge q qu'elle porte, en fonction de Q, r et a.

2) Calculer la charge Q_1 de (S) au premier contact avec (s) et la charge q_1' de (s) au contact suivant avec P.

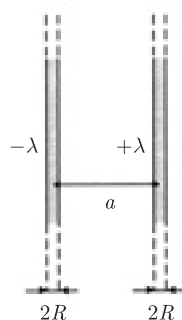
3) Par récurrence, quelle sera la charge Q_n de (S) au n-ième contact avec (s) ?

4) A.N. : les sphères sont identiques et $a = 9r$. Au bout de combien de contacts la charge de (S) sera de 10 000/3 plus faible que sa charge initiale ?

4.4. On considère un fil conducteur cylindrique infiniment long et mince, de rayon R, portant une densité linéique de charge λ.

1) Par application du théorème de Gauss, calculer le champ $\vec{E}(r)$ en un point situé à la distance r de l'axe. En déduire le potentiel $V(r)$ en ce point en supposant $V(\infty) = 0$.

2) Un deuxième fil identique portant la densité linéique de charge $-\lambda$ est placé parallèlement au premier fil à la distance a.



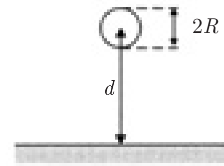
R est suffisamment petit devant a pour que la répartition des charges sur les conducteurs soit considérée comme uniforme.

a) Calculer le potentiel en un point M à la distance r de l'axe du premier fil et à la distance r' du second. En déduire le potentiel de chaque conducteur.

b) Quelle est la différence de potentiel entre les deux fils ? En déduire la capacité par unité de longueur de cet ensemble bifilaire.

A.N. : $R = 2$ mm ; $a = 2$ m ; $K = 9.10^9$ S.I. ; $\lambda = 10^{-8}$ C $\cdot$ m^{-1}.

3) **Application :** Un fil conducteur de rayon $R = 0{,}5$ cm parallèle au plan du sol, à une hauteur de 4 m, est porté au potentiel $V_\mathrm{f} = 1$ kV.

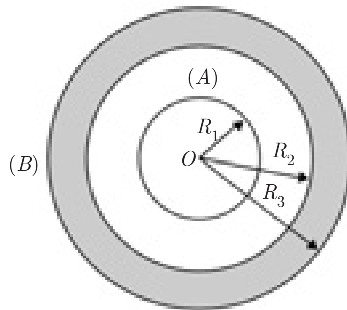


a) En utilisant la méthode des images électriques et les résultats précédents, déterminer la capacité linéique de ce conducteur en présence du sol.

b) Quelle est la valeur du champ électrique à la surface de ce conducteur ?

4.5. *1)* Quelle est la charge Q_1 d'une sphère métallique (A) de rayon $R_1 = 6$ cm lorsqu'elle est portée au potentiel $V_0 = 45\,000$ volts ? Dans tout le problème on supposera cette sphère isolée.

2) On entoure la sphère (A) par une autre sphère métallique creuse (B) concentrique, de rayons $R_2 = 12$ cm et $R_3 = 15$ cm, initialement neutre et isolée.



a) Quelles sont les charges portées par (B) ?

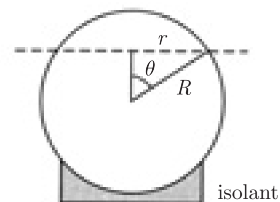
b) En déduire les potentiels V_A et V_B des deux sphères.

c) Déterminer et représenter graphiquement le potentiel $V(r)$ et la norme du champ $\vec{E}(r)$ en tout point M de l'espace, tel que $OM = r$.

3) La sphère (B) est reliée à la terre $(V_B = 0)$. Quel est le nouveau potentiel V'_A de (A) ?

On donne : $$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ S.I.}$$

4.6. Une sphère conductrice creuse de masse M, de rayon R est séparée en deux parties inégales par un plan horizontal : on obtient deux calottes sphériques inégales dont la base commune est un cercle de rayon $r = R\sin\theta$.



La sphère est portée au potentiel $V > 0$, puis isolée.

1) En supposant la calotte inférieure fixe, déterminer la force qu'elle exerce sur la calotte supérieure.

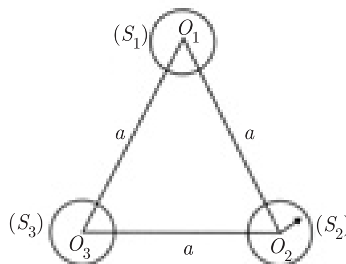
2) Dans le cas où la coupure est faite dans le plan équatorial, pour quelle valeur de V y aura-t-il séparation des deux hémisphères ?

4.7. Trois petites sphères (S_1), (S_2) et (S_3) conductrices, isolées, identiques de rayon R, sont placées dans le vide aux trois sommets d'un triangle équilatéral de côté a $(a \gg R)$. Elles portent respectivement les charges Q_1, Q_2, Q_3.

1) Calculer les potentiels aux centres O_1, O_2 et O_3.

On posera :

$$\frac{R}{a} = \alpha \qquad (\alpha \ll 1)$$



Établir la relation matricielle qui exprime les potentiels V_i en fonction des charges Q_i avec $i = 1,\ 2$ ou 3.

2) Si on écrit $Q_i = \sum_j C_{ij} V_j$ avec $j = 1, 2, 3$ et où V_j est le potentiel de la sphère j portant la charge Q_j, on introduit la matrice des coefficients d'influence C_{ij} qui exprime les charges Q_i en fonction des potentiels V_i.

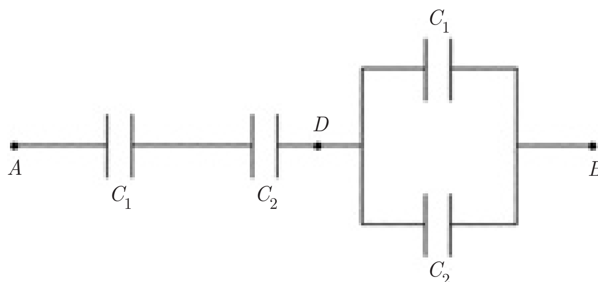
a) Déterminer cette matrice en considérant que c'est la matrice inverse de celle définie à la première question.

b) Vérifier qu'elle est symétrique, que les coefficients C_{ii} sont positifs et les coefficients C_{ij} négatifs.

c) Déterminer ces coefficients au second ordre près.

3) On fait les trois opérations suivantes : la sphère (S_1) est connectée à la terre pendant un temps suffisamment long pour que l'équilibre électrostatique se rétablisse, puis la connexion est coupée. On refait la même opération avec (S_2), puis avec S_3. Calculer les charges Q'_1, Q'_2 et Q'_3 des trois sphères après ces trois opérations.

4.8. Soit le groupement de condensateurs suivant :



1) La capacité C_1 étant donnée, quelle doit être la capacité C_2 pour qu'il y ait entre A et B une capacité équivalente C_e telle que $C_e = \dfrac{C_2}{2}$?

A.N. : $$C_1 = 8\,\mu\text{F}$$

2) Une tension $u_{AB} = 500$ V est appliquée entre les points A et B. Calculer les tensions aux bornes de chaque condensateur ainsi que les charges qu'ils portent.

CORRIGÉS

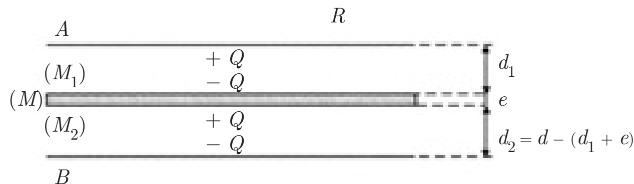
4.1. *1)* La capacité d'un condensateur plan est égale à :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad \text{avec} \quad S = \pi R^2$$

$$Q = C(V_A - V_B)$$

A.N. : $C = 10^{-9}$ F ; $Q = 5 \cdot 10^{-7}$ C.

2) L'influence entre les conducteurs est totale. La répartition des charges qui en résulte est indiquée sur la figure ci-dessous :



3) Les deux faces (M_1) et (M_2) de la feuille métallique sont soumises aux forces électrostatiques $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ égales et opposées, de norme :

$$F_1 = F_2 = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

La résultante des forces est donc égale à

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

4) Soit $V'_A - V'_B$ la nouvelle d.d.p. entre A et B. On a :

$$V'_A - V'_B = (V'_A - V'_{M_1}) + (V'_{M_1} - V'_{M_2}) + (V'_{M_2} - V_B)$$

Comme la surface de la feuille métallique est une équipotentielle

$$V'_{M_1} - V'_{M_2} = 0$$

$$\frac{Q}{C'} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \qquad \text{où} \qquad C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2}$$

Par conséquent, l'ensemble $(P) + (M)$ est équivalent à deux condensateurs mis en parallèle.

On en déduit : $$C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1 + d_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{d - e}$$

soit : $$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{d\left(1 - \frac{e}{d}\right)} = \frac{C}{1 - \frac{e}{d}}$$

A.N. : $$\frac{e}{d} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4 \Longrightarrow C' = \frac{C}{0{,}6} = 1{,}7 \cdot 10^{-9}\ \text{F}$$

$$V'_A - V'_B = \frac{Q}{C} = \frac{C}{C'}(V_A - V_B)$$

A.N. : $$V'_A - V'_B = 0{,}6 \times 500 = 300\ \text{V}$$

4.2. *1)* On a successivement :

$$C' = 4\pi\varepsilon_0 R_1 = \frac{R_1}{K} \quad \text{et} \quad V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = K\frac{Q_1}{R_1}$$

A.N. : $$C_1 = 10^{-11}\text{F} = 10\,\text{pF} \quad \text{et} \quad V_1 = 10^3\text{V} = 1\,\text{kV}$$

2) La charge Q_1 va se répartir sur les deux sphères de façon qu'à l'équilibre le potentiel soit le même sur les deux sphères.
On a donc :

$$V'_1 = V'_2 \Longrightarrow \frac{Q'_1}{R_1} = \frac{Q'_2}{R_2} = \frac{Q'_1 + Q'_2}{R_1 + R_2}$$

avec la condition de conservation de la charge :

$$Q_1 = Q'_1 + Q'_2$$

Par conséquent :

$$Q'_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q_1 \quad \text{et} \quad Q'_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q_1$$

On en déduit les normes des champs électriques :

$$E'_1 = K\frac{Q'_1}{R_1^2} = \frac{V_1}{R_1 + R_2} \qquad \text{et} \qquad E'_2 = K\frac{Q'_2}{R_2^2} = \frac{V_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

A.N. :

$$Q'_1 = 0{,}9 \cdot 10^{-8}\ \text{C} \ ; \qquad Q'_2 = 0{,}1 \cdot 10^{-8}\ \text{C}$$

$$E'_1 = 10^4\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1} \ ; \qquad E'_2 = 9 \cdot 10^4\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

On retrouve le résultat énoncé dans le cours : près d'un conducteur de faible rayon de courbure le champ électrique est plus intense (pouvoir des pointes).

4.3. *1)*

$$V_{0_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{Q}{a}\right) = 0 \implies q = -\frac{Qr}{a}$$

2) Au 1er contact de (s) et (S) on a $V_{0_1} = V_{0_2}$ et, par conséquent :

$$\frac{q_1}{r} = \frac{Q_1}{R} = \frac{q_1 + Q_1}{r + R}$$

Conservation de la charge :

$$q_1 + Q_1 = q + Q \implies Q_1 = \frac{R}{r + R}(q + Q)$$

$$Q_1 = \frac{QR(a - r)}{a(r + R)} \qquad q_1 = \frac{QR(a - r)}{a(r + R)}$$

Au contact suivant de (s) et P :

$$q'_1 = Q_1\frac{r}{a}$$

3) On a de même :

$$Q_2 = Q_1\frac{R(a - r)}{a(r + R)} = Q\left[\frac{R(a - r)}{a(R + r)}\right]^2$$

et par récurrence :

$$Q_n = Q\left[\frac{R(a - r)}{a(R + r)}\right]^n$$

4) A.N. :

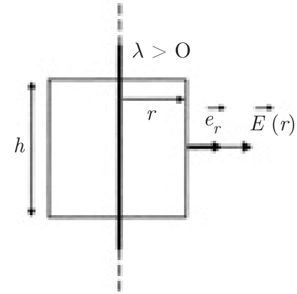
$$Q_n = Q\left(\frac{a - R}{2a}\right)^n$$

$$a = 9R \implies Q_n = Q\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

On doit avoir :

$$\left(\frac{4}{9}\right)^n = 3 \cdot 10^{-4} \Longrightarrow \quad n = \frac{4 - \log 3}{\log 9 - \log 4} = 10$$

4.4. *1)* La distribution de charge présente la symétrie cylindrique : V ne dépend donc que de r et $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$ est radial et ne dépend que de r. La surface de Gauss sera un cylindre de rayon r, de hauteur h ayant le même axe que le fil.



Le théorème de Gauss donne :

$$2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r = \frac{2K\lambda}{r}\vec{e}_r$$

On en déduit :

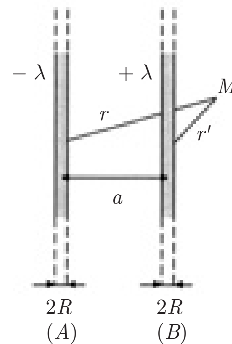
$$V(r) = -\int E\, \mathrm{d}r = -2K\lambda \ln r + \text{cte}$$

$$V(\infty) = 0 \Longrightarrow \text{cte} = 0 \Longrightarrow V = -2K\lambda \ln r$$

2) a) $a \gg R$: la densité linéique de charge de chaque fil ne change pas.

Le principe de superposition donne :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M)$$
$$= -2K\lambda \ln r + 2K\lambda \ln r'$$
$$= -2K\lambda \ln \frac{r'}{r}$$



On en déduit le potentiel de chaque conducteur :

- fil A : $r = R$; $r' = a - R \simeq a$

$$V_+ = 2K\lambda \ln \frac{a}{R}$$

- fil B : $r = a - R \simeq a$; $r' = R$

$$V_- = 2K\lambda \ln \frac{R}{a} = -V_+$$

b) La différence de potentiel entre les deux conducteurs est donc :

$$V_+ - V_- = 2V_+ = 4K\lambda \ln \frac{a}{R} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0} \ln \frac{a}{R}$$

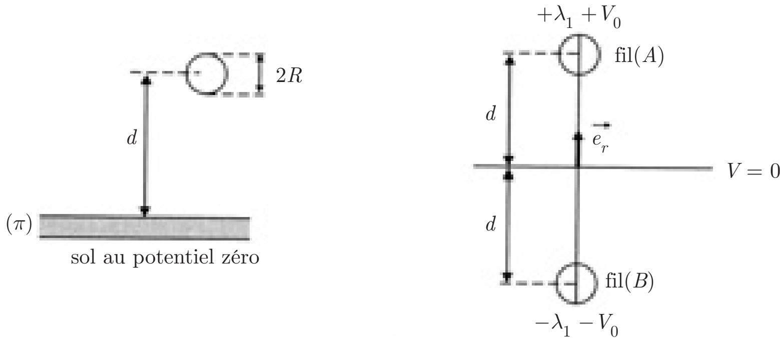
D'où, la capacité C_l par unité de longueur :

$$C_l = \frac{\lambda}{V_+ - V_-} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{a}{R}}$$

3) **Application :** méthode des images électriques.

a) L'ensemble (fil + sol) est équivalent à deux fils (A) et (B) parallèles, distants de 2 d, admettant le plan du sol (π) comme plan médiateur, et portant respectivement les charges linéiques $+\lambda$ et $-\lambda$.

Si le potentiel de (A) est $+V_0$, celui de (B) est $-V_0$ et le plan (π) est bien au potentiel nul. Le fil (B) constitue l'image du fil (A) par rapport au plan (π).



D'après les résultats précédents, pour les deux conducteurs on a :

$$C_l = \frac{\lambda}{V_A - V_B} = \frac{\lambda}{2V_0} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2\text{d}}{R}}$$

On en déduit pour le conducteur A par rapport au sol :

$$C_l' = \frac{\lambda}{V_A - 0} = \frac{\lambda}{V_0} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{2\text{d}}{R}} = \frac{1}{2K\ln\dfrac{2\text{d}}{R}}$$

b) Calcul de $\vec{E}$ à la surface de A :

$$\vec{E} = 2K\lambda\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2\text{d}}\right)\vec{e}_r \qquad (2\text{d} \gg R)$$

$$\vec{E} \simeq \frac{2K\lambda}{R}\vec{e}_r = \frac{V_0}{R\ln\dfrac{2\text{d}}{R}}\vec{e}_r$$

A.N. : $$C'_l = \frac{1}{18 \cdot 10^9 \ln \dfrac{8}{5 \cdot 10^{-3}}} = 7{,}53\ \text{pF} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$E = \frac{10^3}{5 \cdot 10^{-3} \ln \dfrac{8}{5 \cdot 10^{-3}}} = 27\ \text{kV} \cdot \text{m}^{-1}$$

4.5. *1)* Capacité de la sphère A :

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 = 6{,}67 \cdot 10^{-12}\ \text{F}$$

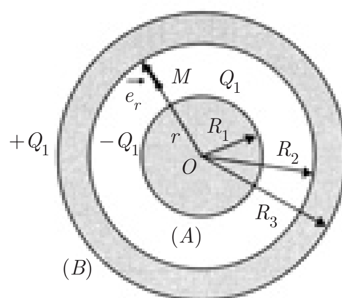
$$Q_1 = C_1 V_0 = 0{,}3\mu C$$

2) a) Par influence totale entre (A) et (B) la surface interne de (B) prend la charge $-Q_1$ et la surface externe la charge $+Q_1$.

b) On a :

$$V_A = \frac{KQ_1}{R_1} - \frac{KQ_1}{R_2} + \frac{KQ_1}{R_3} = 40{,}5\ \text{kV}$$

$$V_B = \frac{KQ_1}{R_3} = \frac{KQ_1}{R_1}\frac{R_1}{R_3} = V_0\frac{R_1}{R_3} = 18\ \text{kV}$$



c) $\boldsymbol{0 < r < R_1}$:

$$V(r) = V_A = 40{,}5\ \text{kV}$$
$$\vec{E} = \vec{0}$$

$\boldsymbol{R_1 < r < R_2}$: Le théorème de Gauss s'écrit :

$$4\pi r^2 E = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}(r) = \frac{KQ_1}{r^2}\vec{e}_r$$

d'où : $$V(r) = \frac{KQ_1}{r} + C_1$$

La continuité de V pour $r = R_1$ s'écrit :

$$V(R_1) = V_A \quad \text{et} \quad \frac{KQ_1}{R_1} + C = V_A \Longrightarrow C_1 = V_A - V_0 = -4{,}5\ \text{kV}$$

D'où : $$V(r) = \frac{KQ_1}{r} - 4{,}5\ \text{kV}$$

$\boldsymbol{R_2 < r < R_3}$: Le conducteur est équipotentiel, soit :

$$V(r) = V(R_2) = V(R_3) = V_B = 18\,\text{kV}$$
$$= \vec{E}(r) = \vec{0}$$

$\boldsymbol{r > R_3}$: On obtient de même par le théorème de Gauss :

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{K\,Q_1}{r^2}\vec{e}_r}$$

$$V(r) = \frac{K\,Q_1}{r^2} \quad \text{avec} \quad V(\infty) = 0$$

Discontinuité de $\vec{E}$ au passage des surfaces des conducteurs :

Surface $\boldsymbol{r = R_1}$:

$$E(r < R_1) = 0 \qquad E(r = R_1) = \frac{K\,Q_1}{R_1^2} = 750\,\text{kV}\cdot\text{m}^{-1}$$

Surface $\boldsymbol{r = R_2}$:

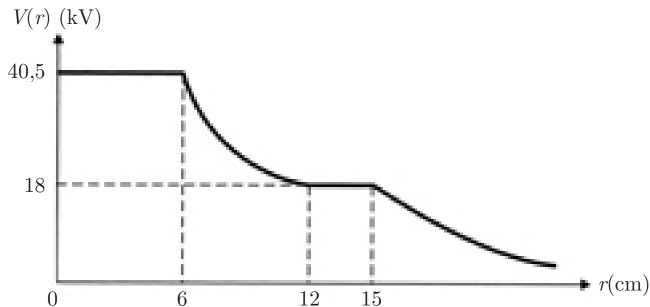
$$E(r < R_2) = \frac{K\,Q_1}{R_2^2} = \frac{K\,Q_1}{R_1^2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 187{,}5\,\text{kV}\cdot\text{m}^{-1}$$

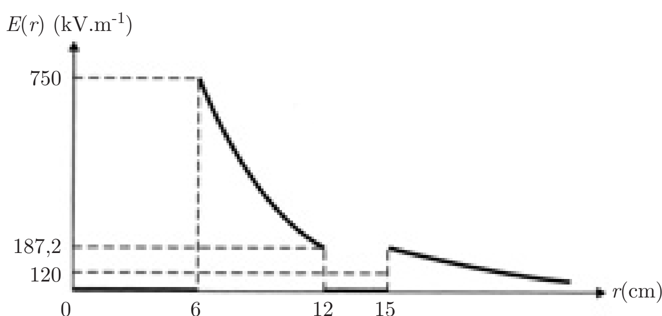
$$E(r = R_2) = 0$$

Surface $\boldsymbol{r = R_3}$:

$$E(r < R_3) = 0 \qquad E(r = R_3) = \frac{K\,Q_1}{R_3^2} = \frac{K\,Q_1}{R_1^2}\left(\frac{R_1}{R_3}\right)^2 = 120\,\text{kV}\cdot\text{m}^{-1}$$

Représentations graphiques :





3) La sphère (B) étant reliée à la terre, elle perd sa charge extérieure $+Q_1$; le potentiel de la sphère A devient :

$$V'_A = \frac{KQ_1}{R_1} - \frac{KQ_1}{R_2} = V_0\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$V'_A = 22{,}5\ \text{kV}$$

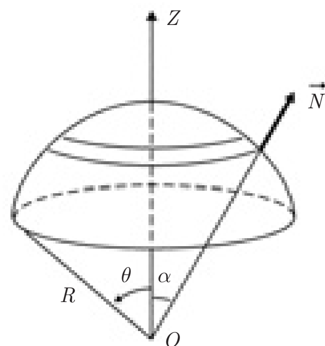
4.6. *1)* Il apparaît sur la sphère conductrice une charge surfacique :

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{CV}{S}$$

avec $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ et $S = 4\pi R^2$.

On en déduit :

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 V}{R}$$



D'après le théorème de Coulomb, le champ $\vec{E}$ est normal à la surface et a pour valeur : $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{N}$. Mais en fait, une charge élémentaire $\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S$ ne voyant pas son propre champ, n'est soumise qu'au champ $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{N}$. Il en résulte une force élémentaire

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = \mathrm{d}q\ \vec{E} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{N}\ \mathrm{d}S$$

$\left(p = \dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\ \text{constitue la pression électrostatique}\right)$.

Par raison de symétrie, la force résultante exercée par la calotte inférieure sur la calotte supérieure est donc parallèle à Oz et ascendante, de norme :

$$F_z = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon}\int_{S_1} \cos\alpha \,\mathrm{d}S$$

où S_1 est la surface de la calotte supérieure.

En prenant $\mathrm{d}S = 2\pi R^2 \sin\alpha \,\mathrm{d}\alpha$, on a :

$$\int_{S_1} \cos\alpha \,\mathrm{d}S = 2\pi R^2 \int_0^\theta \sin\alpha\cos\alpha \,\mathrm{d}\alpha = \pi R^2 \sin^2\theta$$

D'où :

$$F_z = \frac{\varepsilon_0 V^2}{2}\pi \sin^2\theta$$

2) Si la coupure est dans le plan équatorial, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ et l'on a :

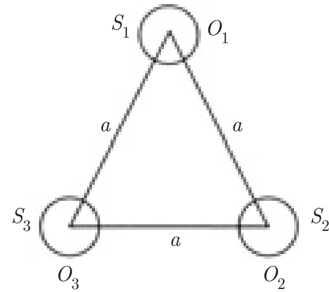
$$F_z = \frac{\varepsilon_0 V^2}{2}\pi$$

La calotte se soulève si $\dfrac{M}{2}g < \dfrac{\varepsilon_0 V^2 \pi}{2}$, soit :

$$V > \sqrt{\frac{Mg}{\varepsilon_0 \pi}}$$

4.7. *1)* S_1 crée en O_1 le potentiel :

$$V_1(O_1) = \frac{KQ_1}{R_1}$$



(S_2) et (S_3) créent en O_1 les potentiels :

$$V_1'(O_1) = \frac{KQ_2}{a} \quad \text{et} \quad V_1''(O_1) = \frac{KQ_3}{a}$$

D'où le potentiel total en O_1 :

$$V_1 = \frac{K}{R}(Q_1 + \alpha Q_2 + \alpha Q_3) \quad \text{en posant} \quad \alpha = \frac{R}{a} \quad (\alpha \ll 1)$$

On aura de même, aux points O_2 et O_3 :

$$V_2 = \frac{K}{R}(\alpha Q_1 + Q_2 + \alpha Q_3)$$

$$V_3 = \frac{K}{R}(\alpha Q_1 + \alpha Q_2 + Q_3)$$

On en déduit la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$

où D est la matrice :

$$D = \frac{K}{R} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

2) La matrice des coefficients d'influence est l'inverse de la matrice D. Elle s'obtient donc :

• en transposant la matrice D,

• en remplaçant chaque élément par le cofacteur (ou mineur) correspondant, c'est-à-dire le déterminant obtenu en barrant la ligne et la colonne du terme considéré, affecté du signe :

+ si la somme $i + j$ est paire,

– si la somme $i + j$ est impaire.

• en divisant la matrice obtenue par le déterminant Δ de la matrice D.

La matrice D étant symétrique, elle est sa propre transposée.

Déterminant Δ :

$$\Delta = \frac{K}{R}[(1-\alpha^2) - \alpha(\alpha - \alpha^2) + \alpha(\alpha^2 - \alpha)]$$

$$\Delta = \frac{K}{R}(1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3)$$

Matrice des cofacteurs :

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha^2) & -(\alpha-\alpha^2) & (\alpha^2-\alpha) \\ -(\alpha-\alpha^2) & (1-\alpha^2) & -(\alpha-\alpha^2) \\ (\alpha^2-\alpha) & -(\alpha-\alpha^2) & (1-\alpha^2) \end{bmatrix}$$

En tenant compte des signes, on obtient la matrice cherchée :

$$C = \frac{R}{K} \cdot \frac{1}{(1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3)} \begin{bmatrix} 1-\alpha^2 & \alpha^2-\alpha & \alpha^2-\alpha \\ \alpha^2-\alpha & 1-\alpha^2 & \alpha^2-\alpha \\ \alpha^2-\alpha & \alpha^2-\alpha & 1-\alpha^2 \end{bmatrix}$$

On vérifie bien que :

– la matrice est symétrique : $C_{ij} = C_{ji}$

– les C_{ii} sont positifs : $1 - \alpha^2 > 0$ car $\alpha \ll 1$

– les C_{ij} sont négatifs : $\alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1) < 0$

Au second ordre près on a :

$$C_{ii} \simeq \frac{R}{K}\frac{1-\alpha^2}{1-3\alpha^2} \simeq 4\pi\varepsilon_0 R(1+2\alpha^2)$$

$$C_{ij} \simeq -\frac{R}{K}\frac{\alpha(1-\alpha)}{1-3\alpha^2} \simeq -4\pi\varepsilon_0 R\alpha(1-\alpha)$$

3) La sphère S_1 est mise au potentiel zéro puis déconnectée : elle va prendre la charge Q_1', S_2 et S_3 gardent leur charge Q_2 et Q_3. On a :

$$V_1' = \frac{K}{R}(Q_1' + \alpha Q_2 + \alpha Q_3) = 0$$

$$Q_1' = -\alpha(Q_2 + Q_3)$$

On aura après chacune des deux autres opérations :

$$V_2' = \frac{K}{R}(\alpha Q_1' + \alpha Q_2' + \alpha Q_3) = 0 \quad ((S_2) \text{ à la terre})$$

$$Q_2' = -\alpha(Q_1' + Q_3) = \alpha[\alpha Q_2 + (\alpha - 1)Q_3]$$

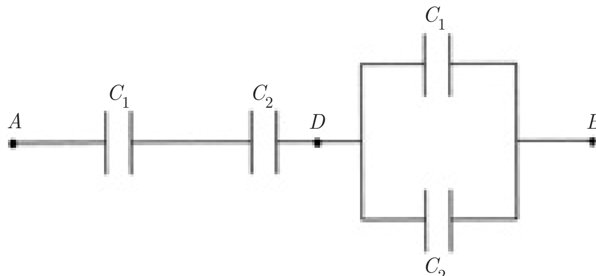
$$V_3' = \frac{K}{R}(\alpha Q_1' + \alpha Q_2' + Q_3') = 0 \quad ((S_3) \text{ à la terre})$$

$$Q_3' = -\alpha(Q_1' + Q_2') = \alpha^2(Q_2 + Q_3) - \alpha^2[\alpha Q_2 + (\alpha - 1)Q_3]$$

soit :

$$Q_3' = \alpha^2[(1-\alpha)Q_2 + (2-\alpha)Q_3] \simeq \alpha^2(Q_2 + 2Q_3)$$

4.8. Association de condensateurs



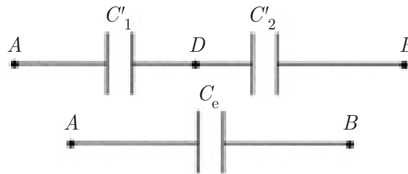
1) La capacité C_1' équivalente à l'association série (C_1, C_2) entre A et D est donnée par :

$$\frac{1}{C_1'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

La capacité C_2' équivalente à l'association parallèle (C_1, C_2) entre D et B est égale à :

$$C_2' = C_1 + C_2$$

On obtient donc le circuit équivalent :



avec
$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1'} + \frac{1}{C_2'} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} + \frac{1}{C_1 + C_2}$$

$$C_e = \frac{C_1 C_2 (C_1 + C_2)}{(C_1 + C_2)^2 + C_1 C_2}$$

C_1 étant donnée, C_2 doit vérifier la condition : $C_e = \dfrac{C_2}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{C_1 (C_1 + C_2)}{(C_1 + C_2)^2 + C_1 C_2}$$

soit
$$(C_1 + C_2)^2 + C_1 C_2 = 2C_1 (C_1 + C_2)$$

Après simplication, on obtient l'équation du second degré :

$$C_2^2 + C_1 C_2 - C_1^2 = 0$$

qui a pour discriminant :

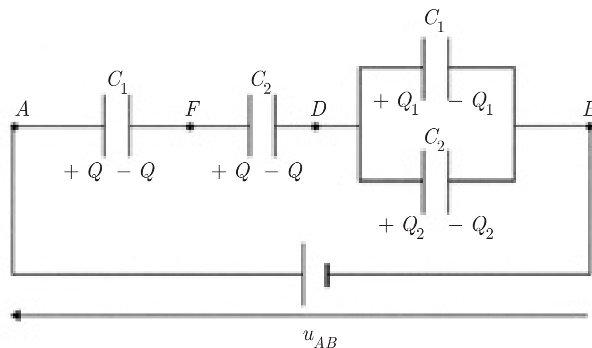
$$\Delta = C_1^2 + 4C_1^2 = 5C_1^2$$

Seule la racine positive est acceptable. On trouve :

$$C_2 = \frac{-C_1 + C_1\sqrt{5}}{2}$$

A.N. :
$$C_2 = 4{,}94\ \mu\text{F}$$

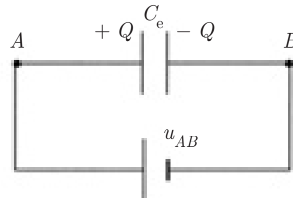
2) Soit $u_{AB} = V_A - V_B$ la tension appliquée entre les points A et B. On a alors la répartition des charges représentée sur la figure ci-dessous :



avec
$$\begin{cases} u_{AB} & = u_{AF} + u_{FD} + u_{DB} \\ Q & = Q_1 + Q_2 \end{cases}$$

D’après la première question, dans le montage équivalent, on aura :

avec $C_e = \dfrac{C_2}{2}$



donc la charge Q portée par C_1 et C_2 est égale à :

$$Q = C_e\, u_{AB} = \frac{C_2}{2} u_{AB}$$

On obtient alors

$$u_{AF} = \frac{Q}{C_1} = \frac{C_2}{2C_1} u_{AB} \qquad \text{et} \qquad u_{FD} = \frac{Q}{C_2} = \frac{u_{AB}}{2}$$

$$u_{AD} = u_{AF} + u_{FD} = \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) \frac{u_{AB}}{2}$$

$$u_{DB} = u_{AB} - u_{AD} = \left(2 - \left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right)\right) \frac{u_{AB}}{2}$$

Soit : $$u_{DB} = \left(1 - \frac{C_2}{C_1}\right)\frac{u_{AB}}{2} = \frac{C_1 - C_2}{2C_1}u_{AB}$$

On en déduit :

$$Q_1 = C_1 u_{DB} = \frac{C_1 - C_2}{2}u_{AB}$$

$$Q_2 = C_2 u_{DB} = \frac{C_2(C_1 - C_2)}{2C_1}u_{AB}$$

A.N. :

$$u_{AF} = \frac{C_2}{2C_1}u_{AB} = 154{,}5\ \text{V} \qquad u_{FD} = \frac{u_{AB}}{2} = 250\ \text{V}$$

$$u_{DB} = \frac{C_1 - C_2}{2C_1}u_{AB} = 95{,}5\ \text{V} \qquad [= u_{AB} - (u_{AF} + u_{FD})]$$

$$Q = \frac{C_2}{2}u_{AB} = 1{,}23\ \mu\text{C}$$

$$Q_1 = \frac{C_1 - C_2}{2}u_{AB} = 0{,}76\ \mu\text{C}$$

$$Q_2 = \frac{C_2(C_1 - C_2)}{2C_1}u_{AB} = 0{,}47\ \mu\text{C} \qquad (= Q - Q_1)$$

5

Énergie électrostatique

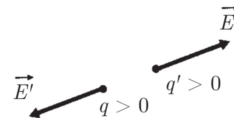
5.1. ÉNERGIE POTENTIELLE D'UNE CHARGE PONCTUELLE EN INTERACTION AVEC UN CHAMP EXTÉRIEUR

Rappelons d'abord qu'une charge ponctuelle isolée ne peut avoir une énergie potentielle (voir chapitre 2, paragraphe 4). En effet, cette charge crée autour d'elle un champ $\vec{E}$ et un potentiel V, mais c'est en interagissant avec le champ d'une autre charge ou d'une distribution de charges qu'elle va acquérir une énergie potentielle E_p engendrant une force d'interaction $\vec{F}$.
Dans le cas de deux charges q et q' en interaction, l'énergie potentielle s'exprime par :

$$\boxed{E_\mathrm{p} = \frac{Kqq'}{r}} \tag{5.1}$$

où q et q' sont des valeurs algébriques et r est la distance séparant les deux charges. Il faut rappeler que l'énergie potentielle définie ci-dessus peut être considérée comme :

– l'énergie de q' dans le champ de q,
– l'énergie de q dans le champ de q',
– l'énergie du système isolé, constitué par les deux charges q et q'.



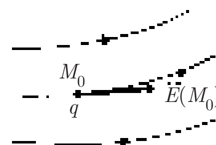
Une justification du dernier point consiste à dire que cette énergie représente le travail qu'il faut effectuer pour réaliser le système des deux charges, c'est-à-dire amener la charge q' de l'infini où le champ de q est nul, à la distance r où le champ est :

$$\vec{E} = \frac{Kq}{r^2}\vec{e}_r$$

En effet, on a :

$$E_{\rm p} = -\int_{\infty}^{r} \vec{F} \cdot \overrightarrow{{\rm d}r} = -Kqq' \int_{\infty}^{r} \frac{\vec{e}_r \cdot \overrightarrow{{\rm d}r}}{r^2}$$
$$= Kqq' \left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = \frac{Kqq'}{r}$$

Supposons maintenant que la charge q se trouve en un point M_0 dans le champ $\vec{E}(M_0)$ créé par une distribution de charge quelconque. Pour exprimer son énergie potentielle, on peut utiliser la même idée : calculer le travail que l'expérimentateur doit effectuer pour amener cette charge q de l'infini au point M_0.



La force que l'expérimentateur doit exercer en un point M quelconque est l'opposée de la force électrostatique, soit :

$$\vec{F}_{\rm exp} = -\vec{F}_e = -q\vec{E}(M)$$

On a donc :

$$E_{\rm p}(M_0) = \int_{\infty}^{M_0} \vec{F}_{\rm exp} \cdot \overrightarrow{{\rm d}M} = -q \int_{\infty}^{M_0} \vec{E} \cdot \overrightarrow{{\rm d}M}$$
$$= q \int_{\infty}^{M_0} {\rm d}V = qV(M_0)$$

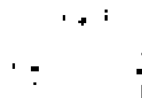
en supposant le potentiel nul à l'infini.

5.2. ÉNERGIE POTENTIELLE D'UN SYSTÈME DE CHARGES

5.2.1 Cas d'une distribution de charges ponctuelles

Soit un système de charges q_1, q_2, q_3 placées respectivement aux points A_1, A_2, A_3. On cherche à déterminer l'énergie potentielle d'un tel système.

Pour cela, on adoptera la même démarche que précédemment, qui consiste à reconstituer le système en amenant les charges l'une après l'autre, de l'infini à leurs positions définitives.



On amène d'abord q_1 en A_1, où l'espace est vide. Le travail effectué est $W_1 = 0$. q_1 étant en A_1, on amène q_2 de l'infini en A_2.

Travail effectué : $$W_2 = K\frac{q_1 q_2}{A_1 A_2}$$

q_1 étant en A_1 et q_2 en A_2, on amène q_3 en A_3.

Travail effectué : $$W_3 = K\left(\frac{q_1 q_3}{A_1 A_3} + \frac{q_2 q_3}{A_2 A_3}\right)$$

Travail total : $$W = W_1 + W_2 + W_3 = E_\text{p}$$

$$E_\text{p} = K\left(\frac{q_1 q_2}{A_1 A_2} + \frac{q_2 q_3}{A_2 A_3} + \frac{q_1 q_3}{A_1 A_3}\right)$$

Pour permettre une meilleure généralisation de cette expression, on peut procéder de la manière suivante : écrivons encore une fois cette même expression de E_p et ajoutons membre à membre les deux expressions. On obtient :

$$\begin{aligned} 2E_\text{p} &= K\left[q_1\left(\frac{q_2}{A_1 A_2} + \frac{q_3}{A_1 A_3}\right) + q_2\left(\frac{q_3}{A_2 A_3} + \frac{q_1}{A_1 A_2}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. + q_3\left(\frac{q_2}{A_2 A_3} + \frac{q_1}{A_1 A_3}\right)\right] \\ &= (q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3) \end{aligned}$$

où V_1 est le potentiel résultant créé par les charges (q_2,q_3) au point A_1, V_2 le potentiel créé par les charges (q_3,q_1) au point A_2, et V_3 le potentiel créé par les charges (q_1,q_2) au point A_3.

On a donc : $$E_\text{p} = \frac{1}{2}(q_1 V_1 + q_2 V_2 + q_3 V_3)$$

soit, en généralisant au cas de n charges

$$\boxed{E_\text{p} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i} \tag{5.2}$$

5.2.2 Cas d'une distribution continue de charges

On peut étendre la sommation discontinue précédente à une sommation intégrale. En désignant par dq la charge élémentaire et par V le potentiel auquel est soumis cette charge, on obtient :

$$\boxed{E_\text{p} = \frac{1}{2}\int_{\text{espace chargé}} V\,\mathrm{d}q} \qquad (5.3)$$

distribution linéaire : $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l \qquad E_\text{p} = \frac{1}{2}\int_L \lambda V \mathrm{d}l$

distribution superficielle : $\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S \qquad E_\text{p} = \frac{1}{2}\int_S \sigma V \mathrm{d}s$

distribution volumique : $\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}\tau \qquad E_\text{p} = \frac{1}{2}\int_\tau \rho V \mathrm{d}\tau$

5.3. ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE EMMAGASINÉE DANS LES CONDUCTEURS CHARGÉS

5.3.1 Énergie d'un conducteur unique

Pour un conducteur de capacité C portant la charge q, la relation (5.3) s'intègre immédiatement, puisque le conducteur est équipotentiel $(V = \text{cte})$.
L'énergie emmagasinée s'écrit donc, compte tenu que $q = CV$:

$$\boxed{E_\text{p} = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}} \qquad (5.4)$$

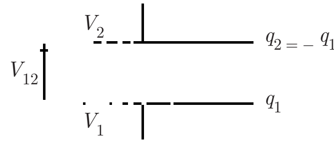
5.3.2 Énergie d'un système à *n* conducteurs

On a alors : $E_\text{p} = \frac{1}{2}q_1V_1 + \frac{1}{2}q_2V_2 + \ldots \frac{1}{2}q_nV_n$

$$\boxed{E_\text{p} = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i} \qquad (5.5)$$

où q_i est la charge portée par le conducteur i et V_i son potentiel.

5.3.3 Énergie d'un condensateur



L'influence entre les armatures étant totale, on a :

$$q_2 = -q_1$$

$$E_\text{p} = \frac{1}{2}\left[q_1 V_1 + q_2 V_2\right]$$
$$= \frac{1}{2} q_1 \left(V_1 - V_2\right)$$

ou encore, en posant $V_1 - V_2 = U$

$$\boxed{E_\text{p} = \frac{1}{2} q_1 U^2 = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C}} \tag{5.6}$$

et cela, quelle que soit la forme du condensateur.

5.4. CHARGE D'UN CONDENSATEUR : ASPECT ÉNERGÉTIQUE

Il s'agit de faire un bilan d'énergie entre un condensateur et la source qui l'alimente, pendant la charge d'un condensateur.
À chaque instant du processus de charge, le condensateur « voit » à la fois son potentiel et sa charge varier. Ces deux grandeurs sont liées par :

$$q = CV \quad \text{et donc} \quad \mathrm{d}q = C\mathrm{d}V$$

La variation d'énergie potentielle est :

$$\mathrm{d}E_\text{p} = V\mathrm{d}q = CV\mathrm{d}V$$

d'où l'énergie emmagasinée pendant toute la charge :

$$E_\text{p} = C \int_0^{V_\text{f}} V\mathrm{d}V = \frac{1}{2} C V_\text{f}^2 = \frac{1}{2} \frac{q_\text{f}^2}{C}$$

où l'indice f désigne les valeurs finales de V et q. On retrouve l'expression de E_p établie précédemment à partir de :

$$E_\text{p} = \frac{1}{2}\left[q_1 V_1 + q_2 V_2\right]$$

qui explicite les contributions des deux armatures.

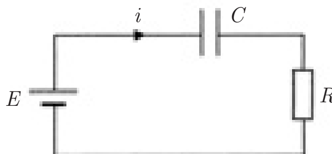
La source, quant à elle, « voit » son potentiel rester constant et égal à V_f pendant tout le processus de charge. L'énergie élémentaire dépensée pour transférer la charge dq au condensateur est :

$$\mathrm{d}E'_\mathrm{p} = V_\mathrm{f}\,\mathrm{d}q$$

d'où l'énergie totale fournie par la source :

$$E'_\mathrm{p} = V_\mathrm{f}\int_0^{q_\mathrm{f}} \mathrm{d}q = q_\mathrm{f}V_\mathrm{f} = CV_\mathrm{f}^2 = 2E_\mathrm{p}$$

On voit que l'énergie dépensée est le double de l'énergie emmagasinée dans le condensateur.
On peut montrer que la différence $E'_\mathrm{p} - E_\mathrm{p} = E_\mathrm{p}$ est obligatoirement dissipée sous forme calorifique dans les fils de connexion, et d'une manière générale dans la résistance du circuit de charge, quelle que soit cette résistance.
En effet, considérons par exemple, le circuit de charge de la figure ci-dessous où R représente la résistance du circuit et E la force électromotrice du générateur.



La loi d'Ohm pour ce circuit s'écrit :

$$Ri + \frac{q}{C} = E$$

L'énergie dissipée par effet Joule entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ est donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W = Ri^2\,\mathrm{d}t &= Ei\,\mathrm{d}t - \frac{q}{C}i\,\mathrm{d}t\\ &= E\,\mathrm{d}q - \frac{q\mathrm{d}q}{C}\end{aligned}$$

Par conséquent, l'énergie totale dissipée au cours de la charge est :

$$W = \int_0^Q E\,\mathrm{d}q - \frac{1}{C}\int_0^Q q\,\mathrm{d}q = EQ - \frac{Q^2}{2C}$$

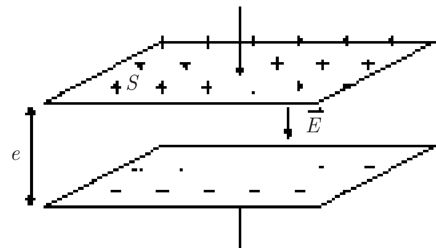
soit, compte tenu de $Q = CE$:

$$W = CE^2 - \frac{CE^2}{2} = \frac{1}{2}CE^2$$

L'énergie dissipée dans le circuit de charge est bien égale à l'énergie emmagasinée dans le condensateur.

5.5. LOCALISATION DE L'ÉNERGIE : DENSITÉ D'ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE

Considérons pour simplifier le cas d'un condensateur plan dont les armatures ont une surface S et sont distantes de e. Soit V la différence de potentiel appliquée entre ces armatures.
L'énergie emmagasinée dans ce condensateur est :



$$E_\text{p} = \frac{1}{2}CV^2$$

et comme $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$ (voir chapitre **5**, paragraphe 8)

on a : $$E_\text{p} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{SV^2}{e}$$

Par ailleurs, le champ électrique entre les armatures est uniforme. Sa norme est donnée par :

$$E = \frac{V}{e}$$

On peut donc écrire : $$E_\text{p} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Se$$

On peut considérer que la densité d'énergie par unité de volume, qui est liée au champ électrique est également uniforme. Elle a pour expression :

$$w = \frac{\text{d}E_\text{p}}{\text{d}\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

puisque le volume du condensateur est $\tau = Se$.

Ce résultat, établi ici dans un cas particulier, est vrai dans le cas général : si un champ électrique est appliqué en un point quelconque de l'espace, on peut lui associer une densité volumique d'énergie donnée par :

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 E^2} \qquad (5.7)$$

5.6. CALCUL DE FORCES ÉLECTROSTATIQUES À PARTIR DE L'ÉNERGIE

Lorsqu'on cherche à calculer les forces électrostatiques à partir de l'énergie emmagasinée dans un système, deux cas peuvent se présenter :

– la charge reste constante,

– le potentiel reste constant.

5.6.1 Calcul de la force, à charge constante

C'est le cas d'un condensateur qui serait préalablement chargé, puis isolé et abandonné aux forces électrostatiques qui s'exercent entre les armatures.
À chaque travail élémentaire dW des forces électrostatiques correspond une variation dE_p de l'énergie emmagasinée. Le système étant isolé, la conservation de l'énergie implique que :

$$\mathrm{d}W + \mathrm{d}E_\mathrm{p} = 0$$

Et comme $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$, on en déduit l'expression de la force électrostatique :

$$\boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_\mathrm{p} \qquad \text{(à charge constante)}} \qquad (5.8)$$

en tout point de la distribution de charge.

5.6.2 Calcul de la force, à potentiel constant

C'est le cas où le condensateur chargé n'est plus isolé, mais reste relié à une source en permanence.
Dans ce cas, à tout travail élémentaire dW des forces électrostatiques correspondent à la fois une variation dE_p de l'énergie emmagasinée, et une énergie dE_S dépensée par la source pour maintenir le potentiel constant.

La conservation de l'énergie, appliquée à l'ensemble du système isolé (condensateur + source), s'exprime cette fois par :

$$\mathrm{d}W + \mathrm{d}F_{\mathrm{p}} = \mathrm{d}E_{\mathrm{s}}$$

Nous avons vu (voir paragraphe 4) que l'énergie dépensée par la source est le double de l'énergie emmagasinée dans le condensateur, soit $\mathrm{d}E_{\mathrm{s}} = 2\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$.
On en déduit

$$\mathrm{d}W + \mathrm{d}E_{\mathrm{p}} = 2\mathrm{d}E_{\mathrm{p}} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}W = \mathrm{d}E_{\mathrm{p}}$$

et comme $\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$, il vient :

$$\boxed{\vec{F} = +\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_{\mathrm{p}} \qquad \text{(à potentiel constant)}}$$

en tout point de la distribution de charge.
Il est important de remarquer le changement de signe dans l'expression de $\vec{F}$, par rapport au cas où la charge reste constante.

5.7. EXEMPLES D'APPLICATION

Exemple 1. Énergie d'une sphère conductrice chargée

Si la sphère est conductrice et en équilibre, elle ne peut être chargée qu'en surface (voir chapitre **4**). Soit Q la charge portée par cette sphère, et C sa capacité. Son énergie est donnée par :

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

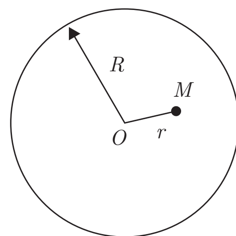
et, comme $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ où R est le rayon de la sphère, on a :

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Exemple 2. Énergie d'une sphère chargée en volume

Il ne peut s'agir d'une sphère conductrice, car à l'équilibre, celle-ci ne peut contenir des charges volumiques. Il s'agira donc plutôt d'une distribution sphérique théorique : modèle d'une sphère diélectrique.

1re méthode :



Soit ρ la densité de charge volumique supposée uniforme.
D'après le paragraphe 2, on a :

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\int_{\tau} \rho V \,\mathrm{d}\tau$$

où V est le potentiel au point courant M et τ est le volume de la sphère.
Si on se réfère au chapitre **3**, paragraphe 7, exemple 2, le potentiel au point M, à l'intérieur de la sphère est donnée par

$$V = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{r^2}{3R^2}\right]$$

En prenant comme volume élémentaire le volume d'une coquille sphérique de rayon r, on a :

$$\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2 \,\mathrm{d}r$$

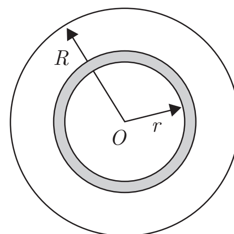
L'expression de l'énergie est donc :

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\frac{\rho^2 R^2}{2\varepsilon_0}\,4\pi\int_0^R r^2\left[1 - \frac{r^2}{3R^2}\right]\mathrm{d}r$$
$$= \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2 R^s$$

et comme $\rho = Q\Big/\frac{4}{3}\pi R^3$, on peut finalement mettre cette énergie sous la forme :

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{3}{5}\,\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3}{5}\,\frac{KQ^2}{R}$$

2e méthode :



On reconstitue la distribution sphérique de charge, en amenant au fur et à mesure des pellicules sphériques de rayon r, r croissant de 0 à R, de l'infini où le potentiel est nul, vers la sphère de rayon r.

À un instant quelconque, la charge amenée est :

$$\mathrm{d}q = 4\pi r^2 \mathrm{d}r\ \rho$$

et le potentiel régnant à la surface de la sphère est :

$$V = \frac{Kq'}{r}$$

où q' est la charge portée par la sphère à cet instant, soit :

$$q' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

L'énergie élémentaire acquise par la sphère est donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_{\mathrm{p}} &= V\mathrm{d}q \\ &= K\frac{4\pi r^3\rho}{3r}\,4\pi r^2\mathrm{d}r\,\rho \\ &= K\frac{16}{3}\pi^2\rho^2 r^4\mathrm{d}r \end{aligned}$$

On en déduit :

$$E_{\mathrm{p}} = K\cdot\frac{16}{3}\,\pi^2\rho^2\int_0^R r^4\mathrm{d}r = K\frac{16}{15}\pi^2\rho^2 R^5$$

et comme $\rho = Q\Big/\frac{4}{3}\pi R^3$, on arrive finalement à la même expression de l'énergie :

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{3}{5}\frac{KQ^2}{R}$$

3e méthode :

On utilise le fait que, une fois la sphère chargée, il existe en tout point de l'espace (intérieur ou extérieur à la sphère) une densité volumique d'énergie :

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

où E est la norme du champ électrique créé par la sphère chargée, en ce point.

Contribution de l'intérieur ($r \leqslant R$) :

Si on se réfère encore au chapitre **3**, paragraphe 7, exemple 2, le champ à l'intérieur de la sphère est donnée par :

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r$$

ou encore puisque $\rho = Q \Big/ \frac{4}{3}\pi R^3$

$$\vec{E} = \frac{KQr}{R^3}\vec{e}_r$$

L'énergie emmagasinée dans la sphère elle-même est donc :

$$E_\text{p}(\text{int}) = \int_\tau w \, \text{d}\tau = \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{K^2Q^2}{R^6}\int_\tau r^2 \text{d}\tau$$

En prenant encore $\text{d}\tau = 4\pi r^2 \text{d}r$, on trouve :

$$E_\text{p}(\text{int}) = \frac{1}{2}\frac{KQ^2}{R^6}\int_0^R r^4 \text{d}r = \frac{KQ^2}{10R}$$

Contribution de l'extérieur ($r \geqslant R$) :

À l'extérieur de la sphère, le champ est donné par :

$$\vec{E} = \frac{KQ}{r^2}\vec{e}_r$$

L'énergie contenue à l'extérieur est donc :

$$E_\text{p}(\text{ext}) = \int_{\text{esp ext.}} w \text{d}\tau = \frac{1}{2}KQ^2 \int_R^\infty \frac{\text{d}r}{r^2}$$

$$= \frac{KQ^2}{r^2}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = \frac{KQ^2}{2R}$$

Énergie totale :

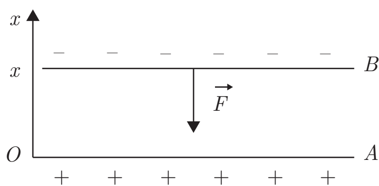
$$E_\text{p} = \frac{KQ^2}{R}\left[\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{5}\frac{KQ^2}{R}$$

On retrouve bien le résultat précédent.

Exemple 3. Force d'attraction entre les armatures d'un condensateur plan

On considère un condensateur plan dont les armatures ont une surface S et sont écartées d'une distance x.
On suppose que l'armature inférieure A est fixe et que l'armature supérieure B est susceptible de se déplacer sous l'action des forces électrostatiques qui s'exercent entre les deux armatures.

On suppose que le condensateur est chargé de telle sorte que l'armature inférieure soit de signe positif et l'armature supérieure de signe négatif. On peut prévoir que la force subie par l'armature B sera verticale et dirigée vers le bas. Il s'agit de déterminer l'expression de cette force.



1) **Condensateur chargé et isolé (**$q = \text{cte}$**) :**

D'après le paragraphe 6, on a dans ce cas :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_\text{p} \quad \Longrightarrow \quad F_x = -\frac{\text{d}E_\text{p}}{\text{d}x}$$

Comme $\quad E_\text{p} = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{C} \quad$ et $\quad C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{x}$, on en déduit :

$$F_x = -\frac{1}{2}q^2\frac{\text{d}}{\text{d}x}\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{1}{2}q^2\left(-\frac{1}{C^2}\right)\frac{\text{d}C}{\text{d}x}$$

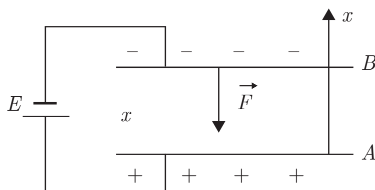
$$= -\frac{q^2}{2C^2}\frac{\varepsilon_0 S}{x^2} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

2) **Condensateur relié à un générateur** ($V = \text{cte}$) **:**

Dans ce cas, on a :

$$\vec{F} = +\overrightarrow{\text{grad}}\, E_\text{p} \Longrightarrow F_{x'} = \frac{\text{d}E_\text{p}}{\text{d}x}$$

$E_\text{p} = \dfrac{1}{2}CV^2$ d'où :

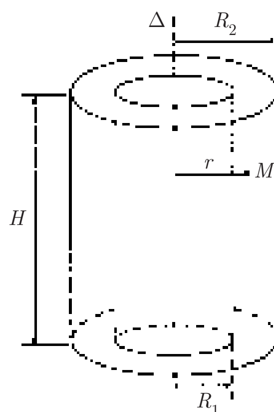


$$F'_x = \frac{V^2}{2}\frac{\text{d}C}{\text{d}x} = -\frac{V^2}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{x^2} = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

Ainsi, on obtient la même force attractive dans les deux cas : à charge constante ou à potentiel constant.

EXERCICES

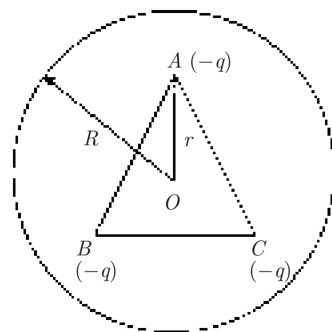
5.1. On considère un condensateur cylindrique d'axe Δ dont les armatures de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$) sont séparées par du vide.



1) Soit $V_1 - V_2$ la différence de potentiel entre l'armature interne et l'armature externe du condensateur, et q la charge de ce condensateur par unité de longueur. Rappeler l'expression du potentiel en un point M situé entre les deux armatures et celle de la capacité C_l par unité de longueur de ce condensateur.

2) En utilisant l'énergie emmagasinée entre les armatures, retrouver l'expression de C_l.

5.2. Une sphère de centre O et de rayon R contient une charge $+3q$ ($q > 0$) répartie uniformément dans son volume avec une densité uniforme ρ. À l'intérieur de la sphère se trouvent trois charges ponctuelles, chacune égale à $-q$, placées aux sommets A, B et C d'un triangle équilatéral de centre O. Les distances OA, OB et OC sont égales à r ($r < R$).



1) Donner les expressions :

– du potentiel V_1 créé en A par les charges ponctuelles $-q$ placées en B et C,

– du potentiel V_2 créé en A par la distribution volumique de charges sachant que $V_2(O) = 0$,

En déduire le potentiel total V_A au point A.

2) Calculer l'énergie potentielle électrostatique $E_\mathrm{p}(r)$ des trois charges négatives à partir du travail fourni par un opérateur qui amène successivement les trois charges de l'infini, où le potentiel est nul, jusqu'en A, B ou C en présence de la distribution volumique de charges.

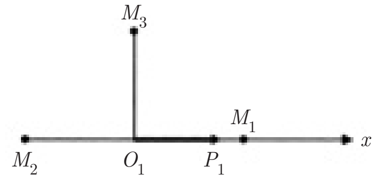
3) Tracer la courbe $E_\mathrm{p}(r)$. Déterminer la position d'équilibre pour les trois charges $(-q)$. Préciser la stabilité de cet équilibre.

5.3. *1)* Rappeler l'expression du champ électrique $\vec{E}$ créé en un point $M(r,\theta)$ par un dipôle de moment $\vec{P}_1$, parallèlement à $O_1\vec{x}$, placé en O_1 dans les trois cas suivants :

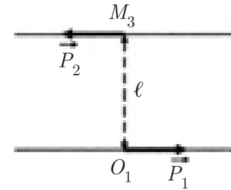
a) $O_1M_1 = r \qquad \theta_1 = (\vec{P}_1, \overrightarrow{O_1M_1}) = 0$

b) $O_1M_2 = r \qquad \theta_2 = (\vec{P}_1, \overrightarrow{O_1M_2}) = \pi$

c) $O_1M_3 = r \qquad \theta_3 = (\vec{P}_1, \overrightarrow{O_1M_3}) = \dfrac{\pi}{2}$

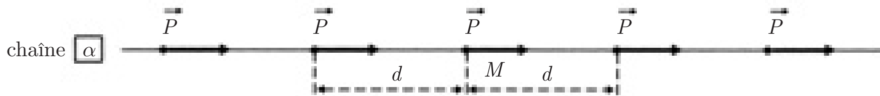


2) Sur la perpendiculaire à $\vec{P}_1$ menée de O_1, on place en M_3 un deuxième dipôle de moment dipolaire $\vec{P}_2$ (voir figure) ; la distance $\ell = O_1M_3$ étant grande devant les dimensions des dipôles. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle du dipôle $\vec{P}_2$ dans le champ de $\vec{P}_1$?

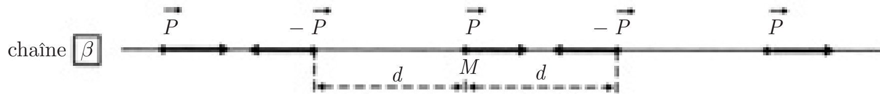


3) On considère à présent une chaîne, supposée infinie, de molécules polaires identiques, distantes de d, (d est très grand, devant la dimension du dipôle) dans les deux configurations suivantes :

• configuration α :



• configuration β :



On choisit une molécule M quelconque dans la chaîne.

a) Chaîne $\boxed{\alpha}$

– Donner l'expression du champ électrique $\vec{E}$ créé en M par les deux molécules situées de part et d'autre de M, puis celle du champ électrique total $\vec{E}_T$ en M, dû à la chaîne infinie.

– En déduire l'énergie potentielle du dipôle placé en M dans le champ des autres dipôles.

b) Chaîne $\boxed{\beta}$

Mêmes questions que pour la chaîne α.

On donne :

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots \simeq 1{,}2$$

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \ldots \simeq 0{,}9$$

5.4. Un condensateur plan est constitué par deux plaques métalliques de surface $S = 30\ \text{cm}^2$ distantes de $x = 5\ \text{cm}$. Il est chargé sous une ddp de 500 V puis isolé.

1) Quelles sont :

– sa capacité C ?

– la charge Q de ses armatures ?

– son énergie potentielle E_p ?

Faire l'application numérique

2) On écarte les armatures de façon à porter leur distance à $x' = 10\ \text{cm}$.

a) Quelles sont, à la fin de l'opération :

– la tension finale V' ?

– l'énergie potentielle E'_p du condensateur ?

En déduire la variation d'énergie potentielle $\Delta F'_\text{p}$ du condensateur au cours de l'opération.

b) On suppose que l'écartement des plaques est réalisé par un opérateur de façon quasi statique. Quel est le travail W fourni par l'opérateur ?

Comparer W et $\Delta E'_\text{p}$.

3) On effectue la même opération mais en maintenant constante la ddp à 500 V grâce à une liaison avec un générateur de tension. On néglige la résistance du générateur et des fils de jonction.

a) Quelles sont, à la fin de cette opération :

– la nouvelle charge Q' des armatures ?

– l'énergie potentielle E''_p du condensateur ?

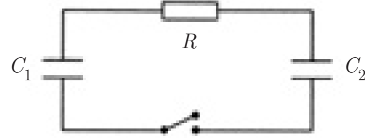
Quelle a été la variation d'énergie potentielle $\Delta E''_\text{p}$ du condensateur au cours de cette opération ?

b) Comme dans la question 2b, l'écartement des plaques est réalisé par un opérateur. Quel est le travail W' fourni par cet opérateur ? Comparer W' et $\Delta E''_\text{p}$. Établir le bilan énergétique de l'opération.

5.5. *1)* Un condensateur de capacité C_1 est chargé sous une différence de potentiel V_1, puis isolé.

Donner les expressions de la charge Q_0 et de l'énergie W_0 emmagasinées dans le condensateur C_1 à la fin de l'opération.

2) On décharge le condensateur C_1 dans un condensateur C_2, initialement neutre, à travers une résistance R. Calculer, à l'équilibre, en fonction de Q_0, C_1 et C_2 :



a) les charges Q_1 et Q_2 prises par les deux condensateurs,

b) les différences de potentiel V_1' et V_2' aux bornes des deux condensateurs,

c) les énergies W_1 et W_2 emmagasinées dans les deux condensateurs.

3) a) Écrire la variation de q_1 en fonction du temps au cours de la décharge de C_1 dans le circuit.

b) En déduire l'énergie W_J dissipée par effet Joule dans la résistance R, en fonction de Q_0, C_1 et C_2, pendant la décharge de C_1.

c) Montrer que la variation d'énergie du système entre l'état initial et l'état final correspond à l'énergie dissipée par effet Joule.

5.6. *A)* L'énergie potentielle d'interaction entre les deux atomes d'une molécule diatomique d'iodure d'hydrogène (IH) est représentée par une expression de la forme :

$$E_p(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}} \quad \text{(potentiel de Lennard-Jones)}$$

où x représente la distance séparant les deux atomes, et a et b sont deux constantes positives.

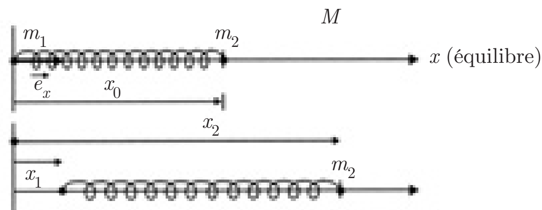
1) Tracer la courbe $E_p(x)$. Déterminer la valeur x_0 pour laquelle le système est en équilibre stable. Quelle est l'énergie potentielle $E_p(x_0)$ correspondante ?

2) Pour une molécule d'iodure d'hydrogène, l'énergie de dissociation est $E_D = 5 \cdot 10^{-19}$ joule et la distance $x_0 = 1{,}64$ Å.

– Quelle est la relation entre E_D et $E_p(x_0)$?

– Quelles sont les valeurs des constantes a et b ?

B) On considère maintenant que la liaison entre les deux atomes de masse m_1 (pour l'hydrogène) et m_2 (pour l'iode) est équivalente à un ressort de rappel k, dont la longueur au repos est égale à la longueur x_0 de la liaison à l'équilibre. Les déplacements respectifs de m_1 et m_2 par rapport à leurs positions d'équilibre sont x_1 et $(x_2 - x_0)$.



1) Écrire les équations différentielles vérifiées par x_1 et x_2. Déduire de ces deux équations l'équation différentielle vérifiée par la variable $x = x_2 - x_1$. On posera $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ (μ est la masse réduite de l'oscillateur).

2) Déterminer la fréquence propre angulaire ω_0 de vibration de la molécule, c'est-à-dire la fréquence du mouvement relatif de la masse m_2 par rapport à la masse m_1.

C) On revient à la molécule d'iodure d'hydrogène. En utilisant un développement limité au deuxième ordre de $E_\mathrm{p}(x)$ au voisinage de $x = x_0$, montrer que la force de liaison est effectivement une force de rappel de la forme $F_x = -k(x - x_0)$. En déduire l'expression de k en fonction x_0 et E_D.

3) A.N. : Calculer :

– la constante k,

– la pulsation ω_0,

– la fréquence ν_0 des oscillations.

On donne : $m_1 = m_\mathrm{H} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg

$m_2 = m_\mathrm{I} = 127 m_1$

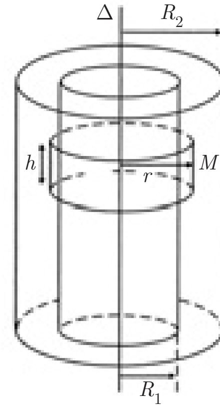
CORRIGÉS

5.1. *1)* Par suite de la symétrie, le champ en tout point M est radial et ne dépend que de $r = HM$. On prend pour surface de Gauss une surface cylindrique de rayon r, de hauteur h et d'axe Δ passant par le point M où l'on veut calculer $\vec{E}$.

Le théorème de Gauss donne :

$$E_M\, 2\pi r h = \frac{qh}{\varepsilon_0}$$

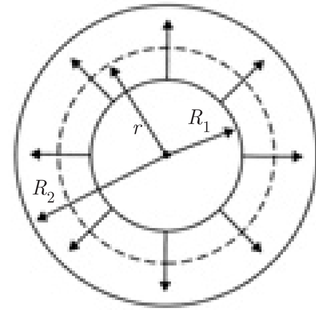
$$\vec{E}_M = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\vec{e}_r$$



Si V_1 est le potentiel de l'armature interne, le potentiel au point M est :

$$V_M = V_1 - \int_{R_1}^{r} E\, \mathrm{d}r$$

$$V_M = V_1 - \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R_1}$$



Entre les deux armatures, la différence de potentiel est :

$$V_2 - V_1 = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$C_l = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$$

2) Entre les armatures du condensateur, la densité d'énergie électrostatique a pour expression :

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2}$$

L'énergie W_h emmagasinée dans un volume $\mathrm{d}\tau$ de hauteur h est :

$$W_h = \int_\tau w\,\mathrm{d}\tau \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}\tau = 2\pi r h\,\mathrm{d}r$$

$$W_h = \frac{q^2 h}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{q^2 h}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R^2}{R_1}$$

Par unité de longueur, on a : $W_1 = \frac{W_h}{h} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$

et comme $W_1 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1}$, on obtient :

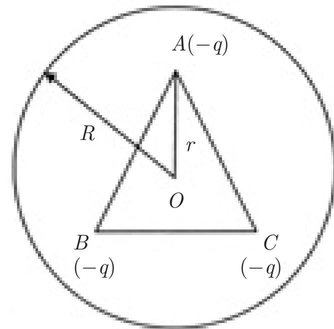
$$C_l = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

qui est bien l'expression trouvée dans la 1re question.

1.2. *1)* On a :

$V_1 = V_B + V_C$ (potentiels créés en A par les charges placées en B et C).

$$V_1 = -\frac{2Kq}{AB} = -\frac{2Kq}{r\sqrt{3}}$$



En un point intérieur à la sphère de rayon R, le champ $\vec{E}$ créé par la distribution sphérique est radial et a pour norme :

$$E_r = 3Kq\frac{r}{R^3} \text{ (voir chapitre } \mathbf{3}\text{, exercice 3)}$$

$$V_2 = -\int E\,\mathrm{d}r = -\frac{3Kqr^2}{2R^3} + C$$

Or : $V_2(O) = 0 \implies C = 0 \implies V_2 = -\frac{3Kqr^2}{2R^3}$

On en déduit le potentiel total au point A :

$$V_A = V_1 + V_2 = -\frac{2Kq}{r\sqrt{3}} - \frac{3Kqr^2}{2R^3}$$

2) Travail pour amener la charge $-q$ de l'infini en A, en présence de la distribution volumique :

$$W_1 = -q(V_2 - V_\infty) = -qV_2$$

Travail pour amener la charge $-q$ de l'infini en B, en présence de la charge $-q$ en A et de la distribution volumique :

$$W_2 = -q(V_2 + V_B)$$

Travail pour amener la charge $-q$ de l'infini en C en présence des charges $-q$ en A et B et de la distribution volumique

$$W_3 = -q(V_2 + V_B + V_C)$$

D'où l'énergie potentielle :

$$E_\mathrm{p}(r) = W_1 + W_2 + W_3 = -3qV_2 - q(2V_B + V_C)$$

$$E_\mathrm{p}(r) = -3q\left[-\frac{3Kqr^2}{2R^3}\right] - q\left[-\frac{3Kq}{r\sqrt{3}}\right]$$

$$E_\mathrm{p}(r) = 3Kq^2\left[\frac{3r^2}{2R^3} + \frac{1}{r\sqrt{3}}\right]$$

3) Pour $r < R$, on a :

$$E_\mathrm{p}(r) = 3Kq^2\left[\frac{3r^2}{2R^3} + \frac{1}{r\sqrt{3}}\right]$$

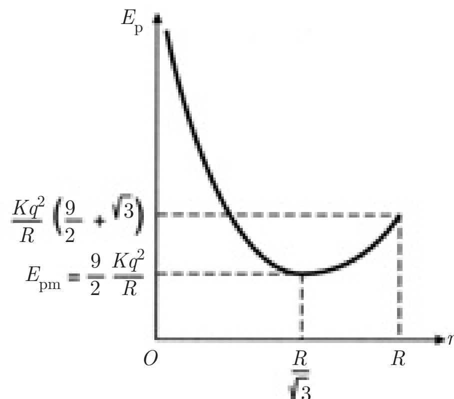
$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = 3Kq^2\left[\frac{3r}{R^3} - \frac{1}{r^2\sqrt{3}}\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = 0 \Longrightarrow 3r^3\sqrt{3} = R^3 \qquad \text{soit} \quad r = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

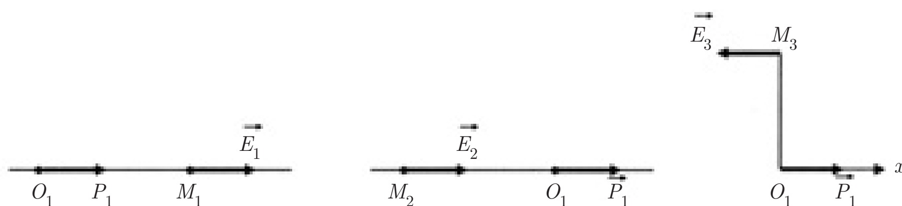
Tableau de variation :

r	0		$\frac{R}{\sqrt{3}}$		R
$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}$		$-$	0	$+$	
E_p		$+\infty$ ↘	$\frac{9}{2}\frac{Kq^2}{R}$	↗	$\frac{Kq^2}{R}\left(\frac{9}{2} + \sqrt{3}\right)$

Pour $r = r_e = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$, l'énergie potentielle des trois charges est minimum, donc r_e correspond à une position d'équilibre stable.



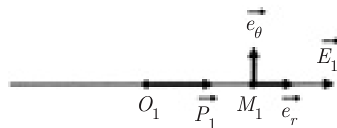
5.3. *1)*



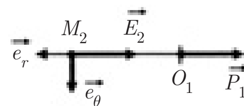
D'après le paragraphe 8 du chapitre 2, le champ électrique créé par un dipôle $\vec{P}_1$ en un point $M(r,\theta)$ est :

$$\vec{E} = \frac{2K P_1 \cos\theta}{r^3}\,\vec{e}_r + \frac{K P_1 \sin\theta}{r^3}\vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad \theta = (\vec{P},\overrightarrow{OM})$$

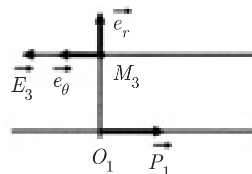
a) $\theta = 0 \qquad \vec{E}_1 = \dfrac{2K P_1}{r^3}\vec{e}_r$



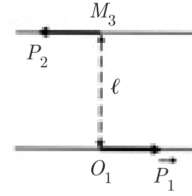
b) $\theta = \pi \qquad \vec{E}_2 = \dfrac{-2K P_1}{r^3}\vec{e}_r$



c) $\theta = \dfrac{\pi}{2} \qquad \vec{E}_3 = \dfrac{K P_1}{r^3}\vec{e}_\theta$



2) L'énergie potentielle du dipôle $\vec{P}_2$ dans le champ de $\vec{P}_1$ est :



$$E_p = -\vec{P}_2 \cdot \vec{E}_1$$

(où $\vec{E}_1$ est le champ créé en M_3 par le dipôle $\vec{P}_1$).
Or, d'après la 1[re] question :

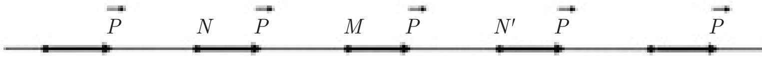
$$\vec{E}_{M_3} = \frac{K P_1}{r^3}\vec{e}_\theta \quad \text{avec} \quad P_1\vec{e}_\theta = -\vec{P}_1$$

$$\vec{E}_1 = -\frac{K\vec{P}_1}{\ell^3}$$

$$E_p = -\vec{P}_2 \cdot \left(-\frac{K\vec{P}_1}{l^3}\right) = K\frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{l^3}$$

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = \pi \qquad \Longrightarrow \qquad E_p = -\frac{K P_1 P_2}{\ell^3}$$

3) a) Chaîne $\boxed{\alpha}$



• Champ créé en M par le dipôle placé en N :

$$\vec{E}_N = \frac{2K\vec{P}}{d^3}$$

Champ créé en M par le dipôle placé en N' :

$$\vec{E}_{N'} = \frac{2K\vec{P}}{d^3}$$

Le champ $\vec{E}$ créé par les molécules situées de part et d'autre de M est donc :

$$\vec{E} = \vec{E}_N + \vec{E}_{N'} = \frac{2K\vec{P}}{d^3}$$

En groupant les dipôles deux par deux, on obtient pour le champ total en M :

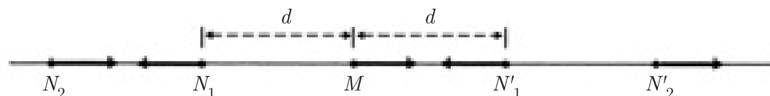
$$\vec{E}_T = \frac{4K\vec{P}}{d^3} + \frac{4K\vec{P}}{(2d)^3} + \frac{4K\vec{P}}{(3d^3)} + \dots$$

$$= \frac{4K\vec{P}}{d^3}\left[1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots\right] = 4{,}8\,\frac{K\vec{P}}{d^3}$$

• Énergie potentielle du dipôle placé en M dans le champ des autres dipôles :

$$E_\text{p} = -P \cdot E_T = -\vec{P} \cdot 4{,}8\,\frac{K\vec{P}}{d^3} = -4{,}8\,\frac{KP^2}{d^3}$$

b) Chaîne $\boxed{\beta}$



• Champ créé en M par les deux dipôles placés en N_1 et N'_1 :

$$\vec{E} = -\frac{4K\vec{P}}{d^3}$$

• Champ créé en M par les deux dipôles placés en N_2 et N'_2 :

$$\vec{E}' = +\frac{4K\vec{P}}{(2d)^3}$$

Le champ électrique total $\vec{E}_T$ en M est donc :

$$\vec{E}_T = -\frac{4K\vec{P}}{d^3}\left[1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \dots\right]$$

$$= -3 \times 6\frac{K\vec{P}}{d^3}$$

• L'énergie potentielle du dipôle placé en M est donc cette fois :

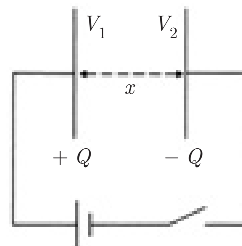
$$E_\text{p} = -\vec{P} \cdot \vec{E}_T = \frac{3{,}6KP^2}{d^3}$$

5.4. *1)* La capacité C, la charge Q et l'énergie potentielle du condensateur sont respectivement :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{x}$$

$$Q = CV = C(V_1 - V_2)$$

$$E_\text{p} = \frac{1}{2}CV^2$$



A.N. :
$$C = \frac{1}{36\pi 10^9}\,\frac{30\cdot 10^{-4}}{5\cdot 10^{-2}} = 5{,}3\cdot 10^{-13}\ \text{F}$$

$$Q = 5{,}3\cdot 10^{-13}\times 5\cdot 10^{2} = 2{,}6\cdot 10^{-10}\ \text{C}$$

$$E_\text{p} = \frac{1}{2}5{,}3\cdot 10^{-13}\times 25\cdot 10^{4} = 6{,}63\cdot 10^{-8}\ \text{J}$$

2) a) Quand l'écartement des plaques est x', la capacité C' est :

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{x'} = \frac{\varepsilon_0 S}{x'}\,\frac{x}{x'} = \frac{C}{2}$$

La charge Q' restant constante au cours de l'opération, on a :

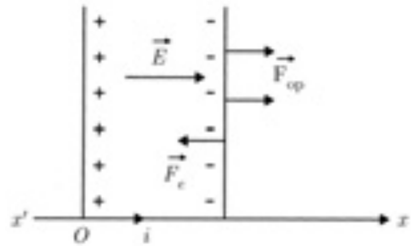
$$Q = CV = C'V' \qquad\qquad V' = V\frac{C}{C'} = V\frac{x}{x'} = 2V$$

$$E'_\text{p} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C'} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C/2} = 2E_\text{p}$$

$$\Delta E'_\text{p} = E'_\text{p} - E_\text{p} = 2E_\text{p} - E_\text{p} = E_\text{p}$$

b) Si l'opérateur déplace l'armature portant les charges négatives dans le sens des $x > 0$, la force qu'il exerce doit être égale et opposée à la force électrique à laquelle est soumise cette armature :

$$\vec{F}_\text{op} = -\vec{F}_\text{e}$$



En appelant p la pression électrostatique, on a :

$$\vec{F}_\text{e} = -pS\vec{i} = -\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}\,\vec{i}$$

$$\vec{F}_\text{op} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}\,\vec{i}$$

Le travail W de l'opérateur est donc :

$$W = \int_x^{x'} \vec{F}_\text{op}\cdot\overrightarrow{\text{d}x} = \int_x^{x'} \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}\,\text{d}x = \int_x^{x'} \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\,\text{d}x$$

Comme la charge Q est constante, on a :

$$W = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{x'}{\varepsilon_0 S} - \frac{x}{\varepsilon_0 S}\right) = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C'} - \frac{1}{C}\right) = E'_\text{p} - E_\text{p}$$

Par conséquent :

L'augmentation d'énergie potentielle du condensateur est due uniquement au travail de l'opérateur.

3) a) Cette fois, $V = \text{cte}$.

On a donc :

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q'}{C'} \quad \Longrightarrow \quad Q' = Q\frac{C'}{C} = Q\frac{x}{x'} \quad \Longrightarrow \quad Q' = \frac{Q}{2}$$

L'énergie potentielle du condensateur est alors :

$$E''_\text{p} = \frac{1}{2}Q'V = \frac{1}{2}\frac{Q}{2}\,V = \frac{1}{2}E_\text{p}$$

D'où la variation d'énergie potentielle du condensateur :

$$\Delta E''_\text{p} = E''_\text{p} - E_\text{p} = \frac{E_\text{p}}{2} - E_\text{p} = -\frac{E_\text{p}}{2}$$

b) À chaque instant du processus, on a :

$$\vec{F}_\text{op} = -\vec{F}_\text{e} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}\,\vec{i}$$

avec : $$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{CV}{S} = \frac{\varepsilon_0 S}{xS}V = \varepsilon_0\frac{V}{x}$$

$$\vec{F}_\text{op} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0}\,\vec{i} = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2x^2}\,\vec{i}$$

Le travail de l'opérateur est alors :

$$W' = \int_x^{x'} \vec{F}_\text{op}\cdot\overrightarrow{\text{d}x} = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2}\int_x^{x'}\frac{\text{d}x}{x^2}$$

$$W' = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right) = \frac{V^2}{2}(C - C')$$

$$W' = E_\text{p} - E''_\text{p} = -\Delta E''_\text{p}$$

Cette fois la variation d'énergie interne est l'opposé du travail de l'opérateur : $\Delta E''_{\mathrm{p}} = -W'$.
En effet, si nous faisons le bilan énergétique au cours de l'opération, la variation d'énergie potentielle du condensateur est due :

– au travail W' de l'opérateur,
– à l'énergie fournie par le générateur ΔE_{g} pour maintenir la tension $V = \mathrm{cte}$.

$$\Delta E_{\mathrm{g}} = V(Q' - Q) = V^2(C' - C) = -2W'$$
$$= 2\Delta E''_{\mathrm{p}}$$

On retrouve bien ;

$$W' + \Delta E_{\mathrm{g}} = -\Delta E''_{\mathrm{p}} + 2\Delta E''_{\mathrm{p}} = \Delta E''_{\mathrm{p}}$$

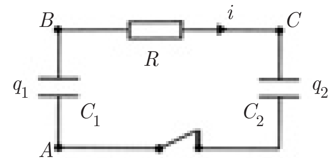
5.5. *1)* À la fin de l'opération, la charge Q_0 du condensateur C_1 est :

$$Q_0 = C_1 V_1$$

et son énergie W_0 est :

$$W_0 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2$$

2) a) Pour le circuit fermé $ABCA$, on a :



$$(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_A) = 0$$

Par conséquent :

$$-\frac{q_1}{C_1} + Ri + \frac{q_2}{C_2} = 0 \qquad (1)$$

Quand l'équilibre est établi, on a :

$$i = 0 \qquad q_1 = Q_1 \qquad q_2 = Q_2$$

Il vient, en remplaçant dans (1) :

$$-\frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} = \frac{Q_0}{C_1 + C_2}$$

D'où :

$$Q_1 = Q_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} \qquad \text{et} \qquad Q_2 = Q_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

b) On en déduit les tensions aux bornes des condensateurs :

$$V_1' = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} \qquad \text{et} \qquad V_2' = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_0}{C_1 + C_2}$$

c) Les énergies emmagasinées par les deux condensateurs sont :

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1'^2 = \frac{1}{2} C_1 \frac{Q_0^2}{(C_1 + C_2)^2} \qquad \text{et} \qquad W_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2'^2 = \frac{1}{2} C_2 \frac{Q_0^2}{(C_1 + C_2)^2}$$

3) b) Au cours de la décharge de C_1 dans le circuit, le courant i qui traverse la résistance R a pour expression :

$$i = -\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}$$

Comme $q_1 + q_2 = Q_0$, l'équation (1) s'écrit :

$$-\frac{q_1}{C_1} - R \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{Q_0 - q_1}{C_2} = 0$$

soit :

$$R \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) - \frac{Q_0}{C_2} = 0 \qquad (2)$$

On pose :

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{q_1}{C'} - \frac{Q_0}{C_2}$$

L'équation (2) s'écrit : $RC' \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0$

Elle a pour solution :

$$x = K e^{-\frac{t}{RC'}} \quad \text{d'où} \quad \frac{q_1}{C'} = K e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{Q_0}{C_2}$$

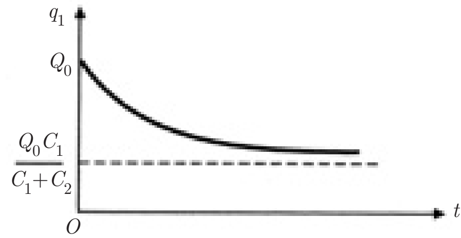
Détermination de la constante K :

à l'instant $t = 0$, début de la décharge, on a :

$$q_1 = Q_0 \Longrightarrow K = \frac{Q_0}{C'} - \frac{Q_0}{C_2} = \frac{Q_0}{C_1}$$

Finalement, on obtient :

$$q_1 = \frac{Q_0}{C_1} e^{-\frac{t}{RC'}} + Q_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$



b) Au cours de la décharge, le courant i qui circule dans le circuit s'écrit :

$$i = -\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = \frac{Q_0}{RC_1}\, e^{-\frac{t}{RC'}}$$

L'énergie dissipée par effet Joule pendant le temps dt est :

$$\mathrm{d}W_\mathrm{J} = Ri^2\,\mathrm{d}t = \frac{Q_0^2}{RC_1^2}\, e^{-\frac{2t}{RC'}}\,\mathrm{d}t$$

$$W_\mathrm{J} = \frac{Q_0^2}{RC_1^2}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC'}}\,\mathrm{d}t = \frac{Q_0^2}{RC_1^2}\frac{RC'}{2} = Q_0^2\frac{C'}{2RC_1^2}$$

De plus, $$C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \Longrightarrow W_\mathrm{J} = \frac{Q_0^2 C_2}{2C_1(C_1 + C_2)}$$

c) Énergie du système à l'instant initial :

$$W_0 = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C_1}$$

Énergie du système à l'instant final :

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2}\,\frac{Q_0^2}{C_1 + C_2}$$

La variation d'énergie est donc :

$$W_0 - (W_1 + W_2) = \frac{1}{2}Q_0^2\left[\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_1 + C_2}\right] = \frac{Q_0^2 C_2}{2C_1(C_1 + C_2)}$$

Par conséquent, elle correspond bien à l'énergie dissipée par effet Joule.

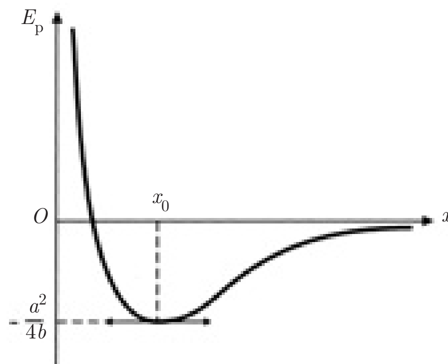
5.6. *A) 1)* $E_\mathrm{p} = -ax^{-6} + bx^{-12}$

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x} = 6ax^{-7} - 12bx^{-13} = 6x^{-7}(a - 2bx^{-6})$$

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \left(\frac{2b}{a}\right)^{1/6}$$ x_0 est une position d'équilibre.

Tableau de variation :

x	0		$\left(\dfrac{a}{2b}\right)^{1/6}$		$+\infty$
$\dfrac{dE_p}{dx}$		$-$	0	$+$	
E_p	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{-a^2}{4b}$	$\nearrow$	0



Pour $x = x_0$, on a :

$$E_p(x_0) = \frac{a}{2b}\left(- a + b\frac{a}{2b}\right) = -\frac{a^2}{4b}$$

C'est le minimum de E_p, donc l'équilibre en x_0 est stable.

2) L'énergie de dissociation de la molécule est l'énergie qu'il faut fournir à la molécule pour éloigner un des deux atomes à l'infini, à partir de sa position d'équilibre. On a donc :

$$E_D = -E_p(x_0)$$

soit :

$$E_D = \frac{a^2}{4b}$$

Or

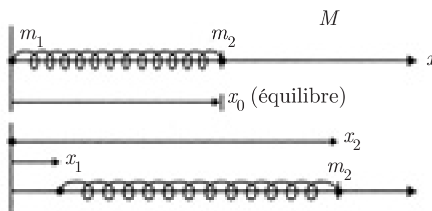
$$\left.\begin{aligned} \frac{2b}{a} &= x_0^6 \\ \frac{a^2}{4b} &= E_D \end{aligned}\right\} \implies a = 2E_D x_0^6 \quad \text{et} \quad b = E_D\, x_0^{12}$$

A.N. : $a = 2 \times 5 \cdot 10^{-19}(1{,}64 \cdot 10^{-10})^6 \implies a = 1{,}95 \cdot 10^{-77}$ S.I.

$b = 5 \cdot 10^{-19}(1{,}64 \cdot 10^{-10})^{12} \implies b = 1{,}89 \cdot 10^{-136}$ S.I.

B) 1) Les équations différentielles vérifiées par x_1 et x_2 sont :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - x_0) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - x_0) \end{cases}$$



En posant $x_2 - x_1 = x$, on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dfrac{k}{m_1}(x - x_0) \\ \ddot{x}_2 = -\dfrac{k}{m_2}(x - x_0) \end{cases}$$

On en déduit :

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(x - x_0)$$

soit $$\ddot{x} = -\frac{k}{\mu}(x - x_0) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

2) Si on pose $\omega_0^2 = \dfrac{k}{\mu}$, la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

La molécule a un mouvement de vibration sinusoïdal, de fréquence $\nu_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$, autour de la position d'équilibre.

C) $E_\mathrm{p} = -ax^{-6} + bx^{-12}$

Le développement limité au 2e ordre de $E_\mathrm{p}(x)$ au voisinage de $x = x_0$ s'écrit :

$$E_\mathrm{p}(x) = E_\mathrm{p}(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} + \frac{(x - x_0)}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0} + \dots$$

On a successivement :

$$E_\mathrm{p}(x) = -\frac{a^2}{4b}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} = 6ax_0^{-7} - 12bx_0^{-13} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2} = -42ax^{-8} + 156bx^{-14} = 6x^{-8}[-7a + 26bx^{-6}]$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0} = \frac{6a}{2b}\cdot\frac{1}{x_0^2}\left(-7a + 26b\,\frac{a}{2b}\right) = \frac{18a^2}{bx_0^2}$$

Au voisinage de x_0, on peut donc écrire E_p sous la forme :

$$E_\mathrm{p} \simeq -\frac{a^2}{4b} + \frac{(x - x_0)^2}{2}\frac{18a^2}{bx_0^2}$$

$$\simeq -E_\mathrm{D} + 36\frac{E_\mathrm{D}}{x_0^2}(x - x_0)^2$$

Puisque $$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E_\mathrm{p} = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}x}\,\vec{e}_x$$

on a :
$$\vec{F} = \frac{-72E_{\mathrm{D}}(x - x_0)\vec{e}_x}{x_0^2}$$

Cette force de liaison est bien une force de rappel de la forme $\vec{F} = -K(x - x_0)\vec{e}_x$

avec
$$K = \frac{72E_{\mathrm{D}}}{x_0^2}$$

4) A.N. :
$$K = \frac{72 \times 5 \cdot 10^{-19}}{(1{,}64 \cdot 10^{-10})^2} = 1\,338\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1\,338}{1{,}67 \cdot 10^{-27}}\left(\frac{128}{127}\right)} \simeq 9 \cdot 10^{14}\ \mathrm{rad} \cdot s^{-1}$$

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1{,}43 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz}$$

6

Le courant électrique dans les milieux conducteurs

6.1. LES CHARGES MOBILES

Les charges étudiées en électrostatique sont des charges immobiles. Qu'elles soient liées à l'atome ou qu'elles soient « libres », l'équilibre électrostatique implique qu'elles restent fixes. Quand on veut étudier les charges mobiles, on doit introduire un autre champ, le champ magnétique $\vec{B}$ et aussi une densité de courant $\vec{j}$ rendant compte du déplacement des charges. Relier cette densité de courant $\vec{j}$ en un point d'un conducteur, au champ électrique $\vec{E}$ en ce point, constitue le but de l'électrocinétique.

■ Différents types de conducteurs

a) Les métaux

Chaque atome libère un électron en moyenne. Le volume du métal contient deux types de charges de densités volumiques égales et opposées : les charges positives, constituées par les atomes donneurs d'un électron, qui sont supposées fixes et les charges négatives, les électrons libérés, qui sont des charges mobiles. Le nombre d'atomes par cm^3 étant de l'ordre de 10^{23}, la densité volumique de chaque type de charge est :

$$\rho = \pm 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 10^{23} = 1{,}6 \cdot 10^{4}\ \mathrm{C} \cdot \mathrm{cm}^{-3}$$

b) Les semi-conducteurs intrinsèques (Ex : Si, Ge purs)

À chaque atome qui libère un électron et qui devient un ion positif fixe, correspond un atome qui capte un électron (ce qui revient à libérer un « trou » de charge $+e$), cet atome devenant un ion négatif fixe.

On a ainsi une création de paires électron-trou qui croît exponentiellement avec la température. Dans le cas du silicium, à 300° K par exemple, le nombre d'électrons (ou de trous) par cm^3, est de l'ordre de $7 \cdot 10^{10}$ comparé à 10^{23} pour les métaux.

c) Les semi-conducteurs extrinsèques (Ex : Si, Ge dopés)

Si on diffuse dans du silicium intrinsèque de valence 4 des atomes à 5 électrons de valence (As, P), ces derniers libèrent chacun un électron, devenant des ions positifs fixes. Les électrons libérés ont une densité égale à celle des atomes donneurs. Si le taux d'impuretés introduites ou dopage est de 10^{-7}, cette densité est égale à $10^{23} \times 10^{-7} = 10^{16}$ électrons/cm^3, comparée à 10^{23} pour les métaux. Un tel semi-conducteur est dit de type N (pour négatif).
Inversement, si on diffuse dans du silicium des atomes à 3 électrons de valence (Ga, In), ces derniers vont capter chacun un électron, ce qui revient à libérer un trou de charge $+e$. Ces atomes dits accepteurs vont devenir des ions négatifs fixes. Le semi-conducteur est alors dit de type P (pour positif).

d) Les électrolytes

Dans ce cas, les molécules se dissocient en deux ions de signes contraires. Il n'y a pas de charges fixes. Les densités volumiques des ions libres positifs et négatifs sont égales et opposées. Elles sont de l'ordre de 10^{16} à 10^{21}/cm^3.

e) Les gaz ionisés

Les molécules d'un gaz à faible pression peuvent être ionisées par libération ou capture d'électrons. Les ions obtenus constituent des charges libres, respectivement positives ou négatives.

6.2. LE COURANT ÉLECTRIQUE

6.2.1 Vecteur densité de courant

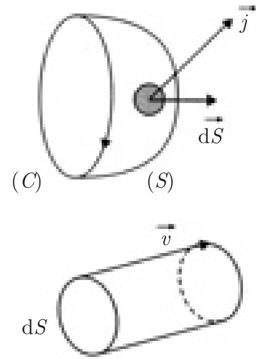
On peut se limiter, pour le moment, à un seul type de porteurs, les électrons par exemple.
Sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$, chaque électron acquiert une vitesse. En désignant par $\vec{v}$, la *vitesse moyenne* de l'ensemble des électrons (on dit aussi *vitesse d'entraînement* ou *de dérive*), et par ρ la charge volumique du milieu, on définit le vecteur de courant en tout point du milieu par :

$$\vec{j} = \rho\vec{v} \quad (6.1)$$

ou encore, puisque $\rho = -ne$ où n est le nombre d'électrons par unité de volume et e la valeur absolue de la charge de l'électron :

$$\boxed{\vec{j} = -ne\,\vec{v}} \qquad (6.2)$$

6.2.2 L'intensité du courant électrique



Soit Φ le flux de $\vec{j}$ à travers une surface (S) orientée (s'appuyant sur un contour (C) orienté).

On a :
$$\Phi = \int_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Le flux élémentaire

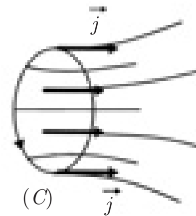
$$\vec{j} \cdot \overrightarrow{dS} = \rho\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}$$

représente la charge contenue dans le volume du cylindre de longueur v s'appuyant sur dS ; c'est aussi la charge qui traverse dS pendant l'unité de temps. On peut donc écrire :

$$\boxed{\int_{(S)} \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{dQ}{dt} = I} \qquad (6.3)$$

définissant ainsi l'intensité du courant qui traverse (S), laquelle s'exprime en **ampère** (A) : $1\,\text{A} = 1\,\text{C} \cdot \text{s}^{-1}$.

6.2.3 Lignes et tube de courant



Une ligne de courant est définie comme une ligne tangente en tout point au vecteur densité de courant $\vec{j}$.
Un tube de courant est formé par l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé (C).
Ses génératrices sont donc tangentes à $\vec{j}$ en tout point.

6.2.4 Différentes formes de conducteurs

a) Conducteurs filiformes

Si la section S d'un conducteur est constante et très petite devant sa longueur, on admet que le vecteur densité de courant est uniforme :

$$j = \frac{I}{S} \quad \text{s'exprime en A} \cdot \text{m}^{-2}$$

b) Conducteurs massifs cylindriques

On a :
$$I = \int_{(S)} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Si $\vec{j}$ est uniforme, on a encore :

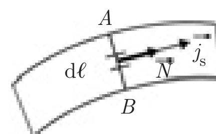
$$j = \frac{I}{S} \quad \text{s'exprime en A} \cdot \text{m}^{-2}$$

c) Nappe de courant

C'est le cas d'un ruban mince ou d'une couche mince. On définit alors une *densité surfacique de courant* (exprimée en A · m^{-1}) donnée par :

$$\vec{j}_S = \sigma\,\vec{v} \tag{6.4}$$

où σ est la charge libre surfacique. En introduisant la ligne AB, perpendiculaire en tout point à $\vec{j}_S$, l'intensité du courant le long de la nappe est :



$$I = \int_{\widehat{AB}} \vec{j}_S \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}\ell = \int_{\widehat{AB}} j_S\,\mathrm{d}\ell \tag{6.5}$$

Si $\vec{j}_S$ est uniforme, on a :

$$j_S = \frac{I}{AB}$$

6.2.5 Ordre de grandeur

La vitesse de dérive des électrons due au champ appliqué $\vec{E}$ est très inférieure à la vitesse des électrons due à l'agitation thermique :

Vitesse d'agitation thermique

Dans ce mouvement tout à fait aléatoire, l'énergie moyenne d'un électron est de l'ordre de quelques eV. Si on identifie une énergie de 1 eV à l'énergie cinétique de l'électron, on trouve :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} m v_0^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v_0 = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 0{,}6 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

À cette vitesse ne correspond aucun courant électrique : l'agitation thermique étant désordonnée, la vitesse moyenne vectorielle correspondante est nulle.

Vitesse de dérive

Soit un fil de cuivre parcouru par un courant de densité 10 A/mm^2. Pour le cuivre, on a :

$$\begin{cases} \text{masse atomique} & M = 63{,}6 \text{ g} \\ \text{masse volumique} & \mu = 8{,}8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{cases}$$

En admettant que chaque atome libère en moyenne un électron libre, on peut trouver le nombre n d'électrons libres par m^3, soit :

$$n = \frac{\mu \mathcal{N}}{M}$$

où $\mathcal{N}$ est le nombre d'Avogadro.
On trouve

$$n = \frac{8{,}8 \cdot 10^3 \times 6{,}02 \cdot 10^{23}}{63{,}6 \cdot 10^{-3}} = 0{,}83 \cdot 10^{29} \text{ électrons} \cdot \text{m}^{-3}$$

On en déduit :

$$|\rho| = ne = 0{,}83 \times 10^{29} \times 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}33 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$v = \frac{j}{\rho} = \frac{10 \cdot 10^6}{1{,}33 \cdot 10^{10}} = 7{,}5 \cdot 10^{-4}\, m \cdot s^{-1}$$

La vitesse de dérive des électrons est très faible devant la vitesse d'agitation thermique.



1) À la vitesse de $7{,}5 \cdot 10^{-4}$ ms^{-1}, il faudrait une heure à un électron pour parcourir une distance de 2,7 m. Par conséquent, lorsqu'on allume une lampe à partir d'un interrupteur, ce n'est pas le nuage électronique mis en mouvement au niveau de l'interrupteur qui va intervenir dans l'échauffement du filament de la lampe.

En fait, la fermeture de l'interrupteur se traduit par la propagation le long du fil d'un signal correspondant au champ électrique, signal qui se propage à une vitesse très élevée, de l'ordre de la vitesse de la lumière dans le conducteur. Ce signal arrive presque instantanément en tous les points du circuit, mettant en mouvement des nuages électroniques autour de chaque point.

2) On peut généraliser la relation $\vec{j} = -ne\,\vec{v}$ établie dans le cas d'une conduction électronique, au cas où l'on aurait des porteurs de charges de natures différentes. On aura alors :

$$\vec{j} = \sum_k n_k q_k \vec{v}_k \tag{6.6}$$

la sommation se faisant sur toutes les espèces de particules concernées. q_k représente alors la valeur algébrique de la charge de la particule de type k.

En particulier, dans le cas d'un semi-conducteur où les charges positives et négatives se déplacent en sens inverse sous l'action du champ appliqué, on a :

$$\boxed{\begin{array}{cc} \longrightarrow & \vec{E} \\ \overset{\longrightarrow}{\vec{v}_+} & \overset{\longrightarrow}{\vec{j}_+} \\ \overset{\longleftarrow}{\vec{v}_-} & \overset{\longrightarrow}{\vec{j}_-} \end{array}}$$

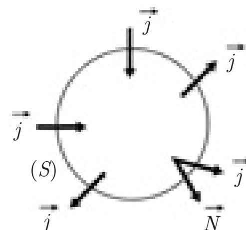
$$\begin{aligned} \vec{j} &= \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_- \\ \vec{j} &= e(n_+ \vec{v}_+ - n_- \vec{v}_-) \end{aligned}$$

Par conséquent, les densités de courant des charges positives et négatives sont de même sens.

On notera que $\vec{j}$ *et* $\vec{E}$ *sont toujours de même sens.*

6.3. ÉQUATION DE CONTINUITÉ

Soit S une surface fermée entourant un volume τ d'un conducteur.



Supposons que la charge volumique ρ soit une fonction de temps. Pendant un intervalle de temps dt, la variation de charge qui en résulte dans un volume élémentaire dτ, s'écrit :

$$\mathrm{d}q = \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}t\ \ \mathrm{d}\tau$$

d'où la variation de charge pour le volume τ :

$$q = \int_{(\tau)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}t\ \ \mathrm{d}\tau$$

Par ailleurs, l'intensité du courant traversant un élément de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est :

$$\mathrm{d}I = \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \vec{j} \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}S$$

où $\vec{N}$ est le vecteur unitaire de la normale sortante. La charge totale transférée pendant le même intervalle de temps est donc :

$$q' = \mathrm{d}t \int_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{N}\,\mathrm{d}S$$

ce qui s'écrit, d'après le théorème d'Ostrograsky :

$$q' = \mathrm{d}t \int_{(\tau)} \mathrm{div}\vec{j}\,\mathrm{d}\tau$$

La loi de conservation de la charge pour un système isolé entraîne que :

$$q + q' = 0$$

soit

$$\int_{(\tau)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau + \int_{(\tau)} \mathrm{div}\vec{j}\,\mathrm{d}\tau = 0$$

Cela étant vrai pour tout volume (τ), on en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \qquad (6.7)$$

Cette équation constitue l'équation de continuité, qui régit tout phénomène de transfert de charges. Elle traduit l'idée que dans un circuit, il ne peut y avoir d'accumulation de charges, ni de courant : c'est la formulation locale de la loi de conservation de la charge électrique.

■ Cas particulier d'un régime stationnaire

Un régime est dit stationnaire (ou permanent) si la distribution des charges et des courants est indépendante du temps. Par conséquent :

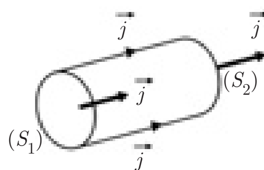
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Autrement dit, la charge contenue dans le volume $d\tau$ est renouvelée par le passage du courant, sans aucune variation de la charge volumique. C'est le cas du courant continu.
L'équation de continuité se réduit alors à :

$$\text{div}\,\vec{j} = 0 \tag{6.8}$$

Il en résulte que : $$\int_S \vec{j} \cdot \vec{N}\, dS = 0$$

Cette équation exprime que le *flux de* $\vec{j}$ *est conservatif*. En d'autres termes :



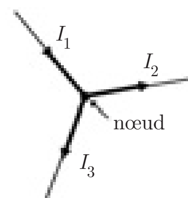
– l'intensité du courant se conserve à travers un tube de courant.

  (S_1) et (S_2) étant deux sections différentes du tube, on a :

$$I(S_1) = I(S_2)$$

– À un nœud de circuit, la somme des courants algébriques (par exemple positifs s'ils arrivent, négatifs s'ils partent) est nulle :

$$\boxed{\sum_K I_K = 0 \text{ (loi des nœuds)}} \tag{6.9}$$





1) Les courants alternatifs de la forme $I = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$ correspondent à des régimes *quasi stationnaires* dans la mesure où l'on peut considérer I à chaque instant comme étant la même en tout point d'un tube de courant.

2) En régime stationnaire ou quasi stationnaire, la conservation de I le long d'un tube de courant implique que les circuits électriques doivent être fermés. (Exemple de circuit ouvert : une antenne traversée par un courant alternatif et émettant des ondes électromagnétiques.)

Le circuit devant être fermé et la nécessité d'avoir un champ $\vec{E}$ pour entraîner les charges libres impliquent l'existence (dans le circuit) d'un générateur capable d'appliquer la d.d.p. nécessaire.

3) Dans le cas d'une conduction par plusieurs types de porteurs, il est bien évident que l'équation de continuité doit être vérifiée par chaque type de porteurs.

6.4. CONDUCTIVITÉ ÉLECTRIQUE : LOI D'OHM LOCALE

Il s'agit d'exprimer la densité de courant $\vec{j}$ dans un conducteur, en fonction du champ appliqué $\vec{E}$, en partant tout simplement du principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de charge q et de masse m.
On suppose la variation de $\vec{E}$ au cours du temps nulle ou faible en chaque point du conducteur (régime stationnaire ou quasi stationnaire).

6.4.1 Premier modèle

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = q\vec{E} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{V} = \frac{q}{m}\vec{E}t + \vec{V}_0$$

Visiblement, cette vitesse (et par conséquent $\vec{j}$) tend vers l'infini au cours du temps, ce qui ne peut être satisfaisant. La solution consiste à envisager les « chocs » multiples que subit la charge q dans son mouvement, notamment sur les atomes du réseau cristallin.
Tout d'abord, la vitesse initiale $\vec{V}_0$ étant aléatoire, sa valeur moyenne $\vec{v}_0$ est nulle. En désignant par τ le temps moyen séparant deux chocs successifs, la vitesse de dérive s'écrit :

$$\vec{v} = \langle\vec{V}\rangle = \frac{q\vec{E}}{m}\tau$$

On en déduit :

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = \frac{nq^2\tau}{m}\vec{E}$$

puisque $\rho = nq$ où n est le nombre de charges par unité de volume.
La relation cherchée s'écrit :

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}} \tag{6.10}$$

où :

$$\boxed{\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}} \tag{6.11}$$

σ est la *conductivité électrique* du matériau, elle s'exprime en siemens par mètre $(\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^{-1})$.
La loi $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ constitue la loi d'Ohm dans sa forme locale, valable en tout point du conducteur.

6.4.2 Second modèle

Il consiste à introduire l'effet des chocs par l'intermédiaire d'une force de frottement opposée à la vitesse de dérive et de la forme :

$$\vec{f} = -\frac{m\vec{v}}{\tau}$$

Dans ce cas, la loi fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{m\vec{v}}{\tau} = q\vec{E}$$

dont la solution est : $$\vec{v} = \frac{q\tau}{m}\vec{E} + \vec{v}_0\, \vec{e}^{-\frac{t}{T}}$$

Au bout d'un temps suffisant, la charge « relaxe » vers le régime permanent, où l'on a :

$$\vec{v} = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$$

expression trouvée précédemment.



- On définit le libre parcours moyen de la charge q comme étant :

$$\ell = v\tau = q\frac{\tau^2}{m}E \qquad (6.12)$$

- La loi d'Ohm a des limites de validité : énergie électrique de l'ordre de l'énergie thermique, effets non linéaires, etc. Elle reste cependant valable en régime sinusoïdal jusqu'à des fréquences très élevées, de l'ordre de 10^{12} Hz.

6.4.3 La mobilité des porteurs

La mobilité μ est définie par la relation :

$$\boxed{\vec{v} = \mu\vec{E}} \qquad (6.13)$$

et comme $$\vec{v} = q\frac{\tau}{m}\vec{E}$$

on a : $$\mu = \frac{q\tau}{m} = \frac{\sigma}{nq}$$

La mobilité définie ainsi est une grandeur algébrique, qui a le même signe de la charge q. Elle s'exprime en $\mathrm{m}^2 \cdot V^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

6.4.4 Résistivité électrique

La résistivité ρ est définie comme l'inverse de la conductivité :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{n|q\mu|} \text{ elle s'exprime en } \Omega \cdot \text{m}.$$

6.4.5 Ordres de grandeurs

Pour le cuivre à 20 °C, on a :

$$\rho = 1{,}72 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m} \quad \Longrightarrow \quad \sigma = 5{,}8 \cdot 10^{7}\ \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

En prenant $n = 10^{29}$ électrons/m^3, on trouve :

$$\tau = \frac{\sigma m}{ne^2} = \frac{5{,}8 \cdot 10^{7} \times 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{10^{29} \times (1{,}6 \cdot 10^{-19})^2} \simeq 2 \cdot 10^{-14}\ \text{s}$$

Si on adopte la valeur de la vitesse v calculée au paragraphe **6.2**, soit $v = 7{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{ms}^{-1}$, on obtient pour la mobilité :

$$|\mu| = \frac{e\tau}{m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 2 \cdot 10^{-14}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}$$

$$\simeq 35 \cdot 10^{-4}\text{m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = 35\ \text{cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

Dans le cas du silicium à 20 °C, les mobilités des électrons et des trous sont respectivement :

$$\mu_e = -1\,700\ \text{cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\mu_t = 250\ \text{cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$



Les expressions précédentes montrent que la conductivité σ dépend à la fois de la mobilité μ et du nombre n de porteurs par unité de volume.

Dans les conducteurs n est indépendant de la température, mais comme μ décroît quand la température augmente, σ diminue également, et par conséquent ρ augmente. La loi de variation de ρ avec la température est :

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$$

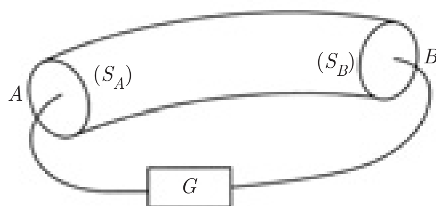
avec $\alpha \simeq \dfrac{1}{273}$ (degré)$^{-1}$ et ρ_0 la résistivité à $t = 0°$ Celsius.

À l'inverse des conducteurs, les semi-conducteurs intrinsèques ont une conductivité σ qui augmente avec la température. À $T = 0$ °K, cette conductivité est nulle.

Dans le cas des matériaux supraconducteurs, la conductivité devient infinie à des températures très basses ($T \leqslant 7$ °K pour le plomb).

6.5. RÉSISTANCE ÉLECTRIQUE : LOI D'OHM MACROSCOPIQUE

Considérons un conducteur limité par deux sections (S_A) et (S_B), portées respectivement aux potentiels V_A et V_B, grâce à un générateur (G) fermant le circuit.



On peut écrire :

$$V_A - V_B = \int_{\widehat{AB}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_{\widehat{AB}} \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$$

En régime stationnaire on peut définir la densité de courant en un point comme :

$$j = \frac{I}{S}$$

où I est l'intensité du courant et S l'aire de la section droite du conducteur en ce point.

On a donc : $$V_A - V_B = \frac{I}{\sigma} \int_{\widehat{AB}} \frac{\mathrm{d}\ell}{S}$$

En introduisant la résistance R du conducteur donnée par :

$$R = \frac{1}{\sigma} \int_{\widehat{AB}} \frac{\mathrm{d}\ell}{S}$$

qui s'exprime en ohms (Ω) on obtient :

$$\boxed{V_A - V_B = RI} \qquad (6.14)$$

qui constitue la loi d'Ohm macroscopique.

■ Cas d'un conducteur cylindrique

Dans ce cas, la section est constante, on a : $R = \dfrac{1}{\sigma S} \displaystyle\int_{\widehat{AB}} \mathrm{d}\ell = \dfrac{1}{\sigma} \dfrac{\ell}{S}$

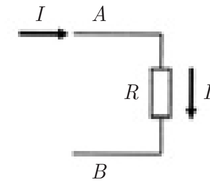
$$\boxed{R = \frac{\ell}{\sigma S}} \qquad (6.15)$$



Il convient de bien noter les conventions adoptées pour définir les signes des courants et des d.d.p.

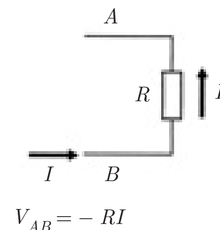
Si $V_A > V_B$, I entre par A et sort par B ; on écrit :

$$V_{AB} = V_A - V_B = RI$$



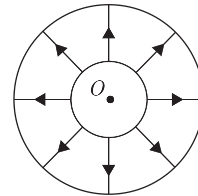
Si $V_A < V_B$, I entre par B et sort par A. Il convient d'écrire :

$$V_{AB} = V_A - V_B = -RI$$



Exemple 1. Résistance d'un conducteur non cylindrique.

Calculer la résistance d'un conducteur occupant l'espace compris entre une sphère de centre O et de rayon R_1 et une sphère concentrique de rayon $R_2 > R_1$, le courant arrivant par le centre et sortant par la périphérie. On admet que les lignes de courant sont radiales.



Les lignes de courant étant radiales, on peut prendre comme section du tube de courant la surface d'une sphère de centre O et de rayon r tel que $R_1 < r < R_2$. On a alors :

$$R = \frac{1}{\sigma}\int \frac{\mathrm{d}\ell}{S} = \frac{1}{\sigma}\int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{4\pi r^2}$$

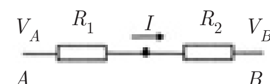
$$R = \frac{1}{4\pi\sigma}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

6.6. ASSOCIATION DE RÉSISTANCES

6.6.1 Résistances en série

On a :

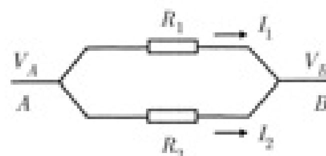
$$V_A - V_B = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$



Résistance équivalente : $R = R_1 + R_2$

$$\boxed{R = \sum_k R_k} \tag{6.16}$$

6.6.2 Résistances en parallèle



On a :

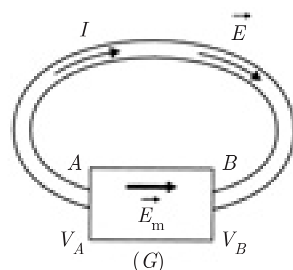
$$\begin{aligned} V_A - V_B &= R_1 I_1 = R_2 I_2 \\ &= R(I_1 + I_2) \end{aligned}$$

Par conséquent : $\dfrac{R}{R_1} = \dfrac{I_1}{I_1 + I_2}$ et $\dfrac{R}{R_2} = \dfrac{I_2}{I_1 + I_2}$

D'où : $\dfrac{R}{R_1} + \dfrac{R}{R_2} = 1$ et $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}} \tag{6.17}$$

6.7. RÔLE DU GÉNÉRATEUR : FORCE ÉLECTROMOTRICE



Soit un générateur (G), appliquant une d.d.p. $V_A - V_B > 0$ aux bornes d'un conducteur AB.
En régime stationnaire ou quasi stationnaire, on a div $\vec{j} = 0$ en tous les points du circuit, y compris dans le générateur, et les lignes de champ sont des courbes fermées.

Si le conducteur était fermé sur lui-même, on aurait :

$$\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0 \quad \text{puisque} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$$

soit :

$$\oint \frac{\vec{j}}{\sigma} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = 0 \quad \text{ce qui entraînerait} \quad \vec{j} = \vec{0}$$

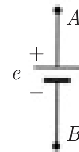
Par conséquent, si le générateur établit un champ $\vec{E}$ entre A et B dans le conducteur, c'est qu'il est lui-même le siège d'un champ $\vec{E}_\mathrm{m}$ dit champ électromoteur (non électrostatique), qui transporte les charges (supposées positives pour simplifier) de V_B à $V_A > V_B$, leur faisant ainsi remonter le potentiel, alors que le champ électrostatique $\vec{E}$ les transporte de V_A et V_B dans le conducteur. C'est la circulation de ce champ $\vec{E}_\mathrm{m}$ dans le générateur qui assure la d.d.p. $V_A - V_B$.
Cette circulation est appelée *force électromotrice* e du générateur (f.é.m.), bien qu'elle ait les dimensions d'un potentiel. On a :

$$\boxed{e = \int_{\widehat{AB}} \vec{E}_\mathrm{m} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = V_A - V_B} \tag{6.18}$$

Le champ E_m peut avoir des origines chimiques (piles et accumulateurs) ou magnétiques (f.é.m. induite).

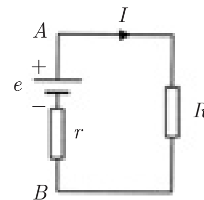
■ **Générateur en circuit ouvert :**

La borne au potentiel le plus élevé constitue la borne positive, et l'autre borne, la borne négative.



On a simplement : $e = V_A - V_B > 0$

■ **Générateur en circuit fermé :**



En se référant à la loi d'Ohm, on a :

$$e = V_A - V_B = (R + r)I$$

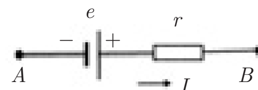
Si le générateur a une résistance r non négligeable, celle-ci prélève sur e la chute de tension (ou chute ohmique) rI avant de délivrer $V_A - V_B$ aux bornes A et B. On a donc :

$$e - rI = V_A - V_B = RI$$

$$I = \frac{e}{R + r} \tag{6.19}$$

■ Tronçon de circuit comportant un générateur

$$V_A - V_B = rI - e \qquad (6.20)$$

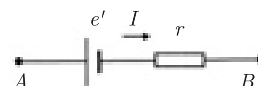


■ Cas d'un récepteur

Alors que pour un générateur, le courant sort du pôle positif et rentre par le pôle négatif, pour un récepteur, le courant suit le chemin inverse : il sort par le pôle négatif. Dans ce cas, la f.é.m. qui est toujours positive, est appelée force contre-électromotrice.
Dans un circuit complexe, comprenant des générateurs et des récepteurs, il peut arriver que le courant d'un générateur sorte par le pôle négatif. Dans ce cas, ce générateur se comporte comme un récepteur : il se charge.

■ Tronçon de circuit comportant un récepteur

$$V_A - V_B = rI + e' \qquad (6.21)$$



6.8. LES LOIS DE KIRCHHOFF

■ Première loi

En un nœud d'un circuit, la somme algébrique des courants est nulle.

$$\boxed{\sum_K I_k = 0 \qquad \text{(loi des noeuds)}} \qquad (6.22)$$

Cette loi, déjà énoncée au paragraphe **6.3**, pour illustrer l'équation de continuité, nécessite d'adopter une convention de signe pour les courants (par exemple positifs s'ils arrivent au nœud, négatifs s'ils en partent).

■ Deuxième loi

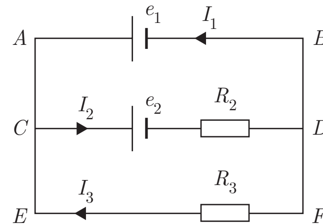
Pour une maille d'un circuit, la somme algébrique des f.é.m. est égale à la somme algébrique des produits RI.

$$\boxed{\sum_k e_k - \sum_k R_k I_k = 0 \qquad \text{(loi des mailles)}} \qquad (6.23)$$

Convention adoptée : on choisit un sens positif de courant *a priori*. Les courants qui vont dans ce sens sont pris positifs, les autres sont pris négatifs. Les f.é.m. sont considérées comme positives lorsque le courant sort par la borne $(+)$ et négatives dans le cas contraire.

Exemple 2. Calcul de courants dans un réseau

On considère le circuit de la figure. Déterminer les courants I_1, I_2, I_3, respectivement dans les branches AB, CD, EF.



On se donne arbitrairement les sens de courant indiqués sur la figure.

Loi des nœuds en C :

$$I_2 = I_1 + I_3 \tag{1}$$

Maille *CDFEC* :

$$e_2 + R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0 \tag{2}$$

Maille *CDBAC* :

$$-e_2 - R_2 I_2 + e_1 = 0 \tag{3}$$

La résolution de ce système de 3 équations à 3 inconnues I_1, I_2, I_3 donne :

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)e_1 - R_3 e_2}{R_2 R_3}$$

$$I_2 = \frac{e_1 - e_2}{R_2} \qquad I_3 = -\frac{e_1}{R_3}$$

À partir de ces expressions, connaissant les valeurs numériques des f.é.m. et des résistances, on peut alors déterminer les véritables orientations des courants.

6.9. ASPECT ÉNERGÉTIQUE : LOI DE JOULE

6.9.1 Formulation locale

Reprenons l'équation du mouvement d'une charge q d'un conducteur sous l'action d'un champ appliqué $\vec{E}$ (cf. **6.4.2**) :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{m}{\tau}\vec{v} = q\vec{E}$$

En multipliant par $\vec{v}$, il vient :

$$m\vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{m}{\tau}\,\vec{v}^2 = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

Or : $$\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{E} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \quad \text{car} \quad \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\mathrm{d}V$$

où V est le potentiel. On en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}mv^2 + qV\right] = -\frac{mv^2}{\tau}$$

L'expression entre crochets n'est autre que l'énergie totale de la charge q, composée de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\,mv^2$ et de l'énergie potentielle qV. Par conséquent, la puissance dissipée par frottement par la charge q est $\frac{mv^2}{\tau}$.

On en déduit que la puissance dissipée par unité de volume est :

$$p = \frac{nmv^2}{\tau}$$

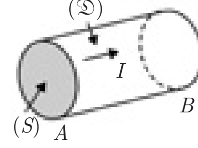
où n est le nombre de porteurs par unité de volume, et comme $v = \frac{j}{nq}$ et que $\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}$, on peut écrire :

$$p = \frac{m}{nq^2\tau}\,j^2 = \frac{j^2}{\sigma} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

d'où $$\boxed{p = \sigma E^2} \qquad (6.24)$$

Cette loi constitue la loi de Joule relative à l'unité de volume du conducteur (loi de Joule locale).

6.9.2 Expression macroscopique



Pour un conducteur AB, de résistance R, occupant le volume $(\mathscr{D})$, traversé par un courant I, on a :

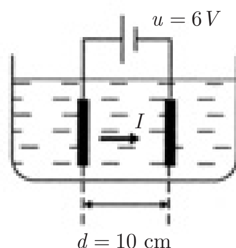
$$\begin{aligned} V_A - V_B &= \int_{\widehat{AB}}^{B} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \\ I &= \int_{(S)} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} \\ (V_A - V_B)I &= \int_{(\mathscr{D})} \vec{j} \cdot \vec{E} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{(\mathscr{D})} p \, \mathrm{d}\tau = P \end{aligned}$$

Ainsi, quelle que soit la forme du conducteur, on retrouve l'expression bien connue de la loi de Joule :

$$\boxed{P = (V_A - V_B)I = RI^2} \tag{6.25}$$

EXERCICES

6.1. On immerge dans une cuve, contenant une solution à une mole par litre de SO_4 Cu, deux plaques de cuivre identiques, que l'on maintient parallèles et écartées de 10 cm.
On créé entre ces deux plaques, ayant chacune une surface de 1 m^2, une différence de potentiel $u = 6$ V. Il passe alors dans la solution un courant $I = 160$ A.



1) Calculer la résistivité de la solution de SO_4 Cu.

2) Calculer la masse de cuivre qui a été transportée d'une plaque à l'autre en une heure.

3) Déterminer l'énergie W nécessaire au raffinage d'un kilogramme de cuivre.

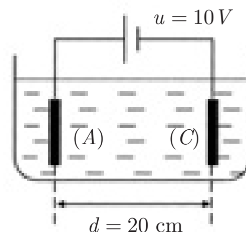
Pour les données numériques, on prendra :

masse atomique du cuivre : $M = 63{,}5$ g

nombre d'Avogadro : $\mathcal{N} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$

charge élémentaire : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

6.2. Une cuve à électrolyte est remplie d'une solution décimolaire (0,1 mole par litre) de SO_4Na_2. La distance d entre l'anode A et la cathode C est égale à 20 cm, leur surface S est 30 cm^2. On applique une différence de potentiel $u = 10$ V entre les électrodes (A) et (C) complètement immergées. Les valeurs des mobilités des cations Na^+ et des anions SO_4^{2-} sont respectivement :



$$\mu_+ = 5 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m^2 \cdot V^{-1} \cdot s^{-1}}$$

$$\mu_- = 8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{m^2 \cdot V^{-1} \cdot s^{-1}}$$

Calculer :

1) le champ $\vec{E}$ dans la solution électrolytique,

2) le nombre n_+ de cations et le nombre n_- d'anions par m^3 de solution, en supposant une dissociation totale,

3) la densité du courant.

4) En déduire la résistance de la solution.

On donne : le nombre d'Avogadro $\mathcal{N} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$

la charge élémentaire $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

6.3. On suppose que dans un cristal de germanium, un atome sur 10^9 atomes donne un électron libre.

1) Calculer le nombre n_e d'électrons libres par unité de volume sachant que :

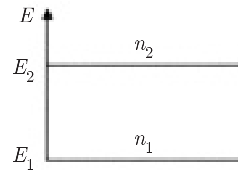
la masse molaire atomique de Ge : $M = 72{,}6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

la densité de Ge : $d = 5{,}36 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$

la nombre d'Avogadro : $\mathcal{N} = 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

2) La mobilité μ des électrons libres étant égale à $0{,}38 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, calculer la conductivité σ du germanium.

3) En fait, le nombre d'atomes donnant un électron libre dépend de la température du cristal. On suppose que les électrons de valence du germanium se répartissent entre deux niveaux d'énergie E_1 et E_2 avec $E_1 < E_2$.



Le nombre n_i d'électrons d'énergie $E_i (i = 1{,}2)$ est donné par la loi de Boltzmann :

$$n_i = n_0 \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$$

où $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann et T est la température du cristal exprimée en kelvin. Les porteurs de charge sont alors les électrons d'énergie E_2.

a) Montrer que le germanium est isolant à très basse température.

b) Calculer n_2 pour $T_1 = 100$ K et $T_2 = 300$ K en prenant $E_2 - E_1 = 0{,}35$ eV et $n_1 + n_2 = 2 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$.

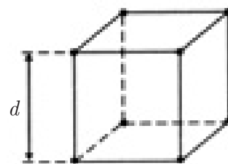
c) Décrire qualitativement la variation de la conductivité σ avec la température.

6.4. Un matériau, de constante dialectrique ε_0, égale à celle du vide, contient n électrons de conduction par unité de volume. Ce matériau est placé dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$ indépendant du temps.
On suppose tous les électrons, de masse m, animés de la même vitesse $\vec{v}$. On représente leur interaction avec le matériau par la force $\vec{f_a} = -m\dfrac{\vec{v}}{\tau}$ où τ est une constante de temps.

1) Expliciter l'équation différentielle satisfaite par $\vec{v}$. Donner l'allure de la courbe $v(t)$. On prendra $v(0) = 0$.

2) Déduire de la relation entre le vecteur densité de courant $\vec{j}$ et le champ $\vec{E}$, en régime permanent ($t \gg \tau$), l'expression de la conductivité σ_0 du matériau en fonction de n, e, τ et m.

3) Ce matériau est constitué d'un réseau cubique d'atomes, d'arête $d = 3$ Å. On suppose que chaque atome fournit un électron libre.
Calculer le nombre n d'électrons libres par m^3. En déduire la valeur de τ si $\sigma_0 = 10^8\ \Omega^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-1}$.
On donne :



$$m = 9 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}\ ; \quad e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

4) On suppose, à présent, que le champ $\vec{E}$ dépend du temps suivant la loi :

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, \mathrm{e}^{i\omega t}$$

a) Déduire de la première question, l'équation différentielle satisfaite par $\vec{j}$.

b) On pose : $$\vec{j} = \sigma(\omega)\vec{E}_0\, \mathrm{e}^{i\omega t}$$

Exprimer alors le rapport $\dfrac{\sigma(\omega)}{\sigma_0}$.

c) Pour quelles valeurs de ω aura-t-on $\dfrac{\sigma_0 - |\sigma|}{\sigma_0} < 0{,}01$?

5) On suppose maintenant que $\vec{E}$ est dû au déplacement des charges libres. On a la relation :

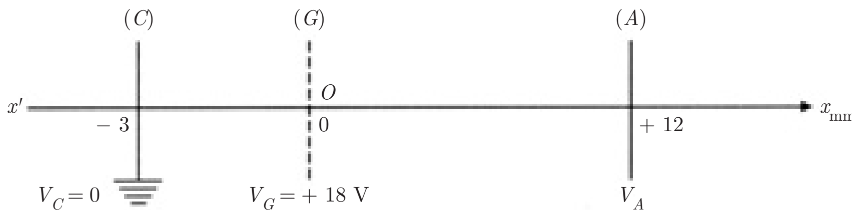
$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

où ρ est la densité volumique de charges.

a) Établir, à partir de l'équation différentielle de $\vec{j}$ et de l'équation de conservation $\mathrm{div}\vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, l'équation différentielle satisfaite par ρ.

b) On pose $\rho = \rho_0\, \mathrm{e}^{\alpha t}$ et $\omega_\mathrm{p}^2 = \dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}$. Décrire la loi de variation de ρ en fonction de t dans le cas où $\omega_\mathrm{p}\tau \gg 1$.

6.5. Une lampe à vide est composée des éléments suivants : une cathode (C) émet des électrons sans vitesse initiale ; parallèlement à la cathode, à une distance de 3 mm, est placée une grille (G) de fil fin, qui laisse passer librement les électrons. La cathode est mise au potentiel nul, la grille est portée au potentiel $+18$ volts. Une seconde surface plane (anode (A)), située à 12 mm de (G) est au potentiel V_A au-dessus de celui de la cathode.



1) a) Avec quelle vitesse les électrons traversent-ils la grille ?

b) Quel est le champ électrique $\vec{E}_1$ entre la cathode et la grille ?

c) La cathode émet 10^{15} électrons par seconde. Déterminer le courant électrique correspondant à cette émission.

2) Sachant que $V_A = +15$ V :

a) Avec quelle vitesse les électrons atteignent-ils l'anode ?

b) Quel est le champ électrique $\vec{E}_2$ entre la grille et l'anode ?

c) Calculer la puissance reçue par l'anode en supposant qu'elle absorbe toute l'énergie des électrons incidents.

3) a) Déterminer V_A pour que les électrons arrivent sur l'anode avec une vitesse nulle.

b) Que se passe-t-il si V_A est négatif ?

c) En désignant par x la distance d'un point quelconque à la grille, déterminer le potentiel $V(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 12$ mm en fonction de V_A et de x.

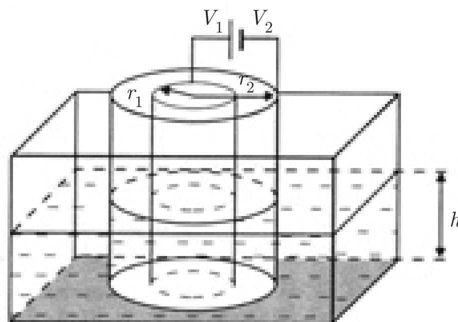
d) En déduire l'abscisse du point où les électrons rebroussent chemin, en fonction de V_A.

A.N. : Calculer x pour $V_A = -15$ V.

On rappelle que la masse m de l'électron est $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

6.6. Deux électrodes cylindriques coaxiales, de résistances négligeables et de rayons respectifs r_1 et r_2 $(r_1 < r_2)$ plongent sur une hauteur h dans un liquide faiblement

conducteur de résistivité ρ. Le fond est isolant. L'électrode de rayon r est portée au potentiel V_1, celle de rayon r_2 au potentiel $V_2 (V_1 > V_2)$.



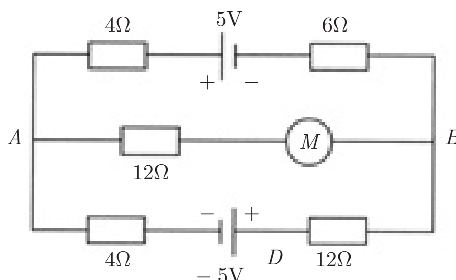
1) Quelle est la relation entre le champ électrique $E(r)$ entre les deux électrodes et le courant I circulant radialement dans l'électrolyte ? En déduire la résistance R de la couche liquide.

A.N. : $\rho = 20\ \Omega \cdot \text{m}$; $r_1 = 1$ cm ; $r_2 = 5$ cm ; $h = 15$ cm

2) Sachant que $V_1 - V_2 = 6$ V, calculer la densité de courant j_1 au voisinage de l'électrode centrale.

3) En conservant à r_2 sa valeur, quelle doit être la valeur de r_1 pour que j_1 soit minimal ? Quelle est alors la nouvelle valeur de j_1 ?

6.7. Un circuit électrique est constitué comme l'indique la figure.



On désigne respectivement par I_1 I_2 I_3 les intensités des courants dans les branches *ACB*, *ADB* et *AB*.

1) (M) est un récepteur polarisé de f.c.é.m. $E' = 2$ volts. Montrer que, quelle que soit la position de ses pôles sur la branche *AB*, ce récepteur se comporte comme un générateur.

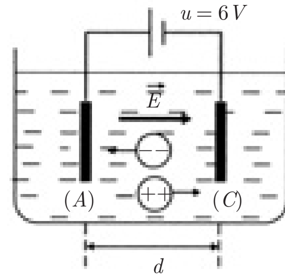
2) (M) est un récepteur non polarisé initialement en circuit ouvert (exemple : un voltamètre).
Dans ce cas, il faut que le courant I_3 réel ait le sens choisi au départ pour polariser le récepteur, c'est-à-dire qu'il entre par le pôle positif de (M) et qu'il ressorte par le pôle négatif.
Sachant que E' (théorique) $=$ 2 volts, déterminer la répartition des courants dans le circuit.

CORRIGÉS

6.1. L'électrolyse de SO_4Cu entre deux électrodes de cuivre provoque le dépôt de Cu^{2+} sur la cathode (C). SO_4^{2-} attaque le cuivre de l'anode (A) et régénère SO_4Cu. La solution reste inaltérée dans l'ensemble et le phénomène se réduit à un transport de cuivre de l'anode vers la cathode.

1) La résistance R de la solution est donnée par :

$$R = \frac{u}{I}$$



Puisque $R = \rho\frac{d}{S}$, en appelant ρ la résistivité de la solution, on a :

$$\rho = \frac{Su}{\mathrm{d}I}$$

A.N. :
$$\rho = \frac{1 \times 6}{0{,}1 \times 160} = 0{,}375\ \Omega \cdot \mathrm{m}$$

2) Soit n le nombre d'atomes de cuivre qui se déposent pendant le temps τ sur la cathode. On a :

$$I = \frac{2en}{\tau} \quad \Longrightarrow \quad n = \frac{I\,\tau}{2e}$$

D'où la masse de cuivre transportée pendant le même temps $\tau = 1$ h :

$$m = n\,\frac{M}{\mathcal{N}} = \frac{I\tau M}{2\mathcal{N}e}$$

A.N. :
$$m = \frac{160 \times 3\,600 \times 63{,}5 \cdot 10^{-3}}{2 \times 6{,}02 \cdot 10^{23} \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 0{,}19\ \mathrm{kg}$$

3) Temps nécessaire pour déposer une masse $m' = 1$ kg.

$$t = 3\,600\,\frac{m'}{m}$$

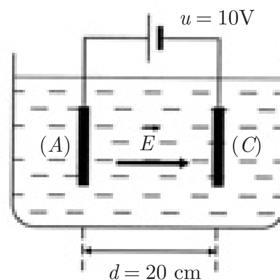
On en déduit l'énergie nécessaire au raffinage d'un kilogramme de cuivre :

$$W = uIt$$

A.N. :
$$W = 6 \times 160 \times 3\,600 \times \frac{1}{0{,}19} = 18{,}2 \cdot 10^6\ \mathrm{J}$$

ou
$$W = 5\ \mathrm{kW \cdot h}$$

6.2. *1)* La norme du champ est :



$$E = \frac{u}{d}$$

$$E = \frac{10}{0,2} = 50 \text{ V}$$

Il est orienté de l'anode A vers la cathode C.

2) Une molécule de SO_4Na_2 se dissocie en donnant :



$$SO_4Na_2 \longrightarrow SO_4^{2-} + 2NA^+$$

La solution étant décimolaire, on a $\dfrac{1}{10}$ de mole par litre, soit $\dfrac{\mathcal{N}}{10} \times 10^3$ molécules par m^3, d'où :

$$n_- = 10^2\,\mathcal{N} \qquad \text{soit} \qquad n_- = 6{,}02 \cdot 10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

$$n_+ = 2 \cdot 10^2\,\mathcal{N} = 2\,n_- \qquad \text{soit} \qquad n_+ = 12{,}04 \cdot 10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

Remarque : Les cations portent la charge $q_+ = +e$ et les anions portent la charge $q_- = -2e$. La solution dissociée conserve la neutralité électrique :

$$n_+q_+ + n_-q_- = (2n_-)e + n_-(-2e) = 0$$

3) Le vecteur densité de courant est :

$$\vec{j} = n_+q_+\mu_+\vec{E} + n_-q_-\mu_-\,\vec{E}$$

soit

$$\vec{j} = n_+q_+(\mu_+ + \mu_-)\vec{E} = 2n_-e(\mu_+ + \mu_-)\vec{E}$$

$$j = 125{,}22\ \text{A} \cdot \text{m}^{-2} \text{ orienté dans le sens } \vec{E}$$

4) On en déduit la résistance R de la solution :

$$R = \frac{u}{jS} \quad \Longrightarrow \quad R = 26{,}62\ \Omega$$

6.3. *1)* Le nombre d'atomes de germanium par m^3 est :

$$N = \frac{10^3 \text{d}\mathcal{N}}{M}$$

Le nombre d'électrons libres par m^3 est alors :

$$n_e = \frac{N}{10^9} \quad \text{soit} \quad n_e = 4{,}4 \cdot 10^{19}\ \text{m}^{-3}$$

2) La relation entre la conductivité σ et la mobilité μ est :

$$\sigma = n_e e \mu \quad \text{soit} \quad \sigma = 2{,}7\ \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$$

3) a) La loi de Boltmann donne :

$$n_1 = n_0 \exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad n_2 = n_0 \exp\left(-\frac{E_2}{k_B T}\right)$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right)$$

Quand $T \to 0$ alors $\dfrac{E_2 - E_1}{k_B T} \to \infty$ et $\exp\left(-\dfrac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) \to 0$

Le nombre n_2 d'électrons libres tend vers zéro : le germanium se comporte alors comme un isolant.

b) On a :

$$n_1 + n_2 = n_2\left(\frac{n_2}{n_1} + 1\right) = 2 \cdot 10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

$$n_2 = \frac{2 \cdot 10^{25}}{\dfrac{n_1}{n_2} + 1} \quad \text{avec} \quad \frac{n_1}{n_2} = \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right), \text{ soit :}$$

$$n_2 = \frac{2 \cdot 10^{25}}{\exp\left(\dfrac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) + 1}$$

$$E_2 - E_1 = 0{,}35\, e\text{V} = 0{,}35 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 0{,}56 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Pour $T_1 = 100$ K on obtient $n_2 \simeq 4{,}8 \cdot 10^7\ \text{m}^{-3}$

Pour $T_2 = 300$ K on obtient $n_2 \simeq 2{,}7 \cdot 10^{19}\ \text{m}^{-3}$

c) On remarque que n_2 croît avec la température, donc $\sigma = n_2 e \mu$ croît également, du moins tant que la mobilité μ ne varie pas trop dans l'intervalle de température considéré.

6.4. *1)* L'équation du mouvement d'un électron est :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

$$\vec{v} = -\frac{e}{m}\tau\vec{E} + \vec{C}e^{-t/\tau}$$

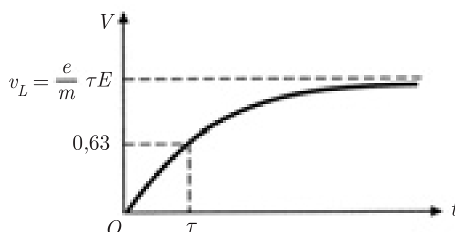
$$v(0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{C} = \frac{e}{m}\,\tau\vec{E}$$

$$\vec{v} = -\frac{e}{m}\,\tau\vec{E}(1 - e^{-t/\tau})$$

soit $$v = \frac{e}{m}\,\tau E(1 - e^{-t/\tau})$$

• Pour $t \to \infty$:

$$v = v_L = \frac{e}{m}\tau E$$



• Pour $t = \tau$:

$$v = \frac{e\tau E}{m}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0{,}63\, v_L$$

2) On a : $$\vec{j} = -ne\vec{v}$$

En régime permanent ($t \gg \tau$) $$\vec{v} = \vec{v}_L = -\frac{e}{m}\,\tau\vec{E}$$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$$

La relation $\vec{j} = \sigma_0\vec{E}$ implique que :

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

3) Un atome occupe le volume d'un cube d'arête d, d'où :

$$n = \frac{1}{d^3} = 3{,}7 \cdot 10^{28}\ \text{m}^{-3}$$

$$\tau = \frac{m}{ne^2}\,\sigma_0 = 9{,}5 \cdot 10^{-14}\ \text{s}$$

4) a) En remplaçant $\vec{v}$ par $-\dfrac{\vec{j}}{ne}$ dans la première question, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t} + \frac{\vec{j}}{\tau} = \frac{\sigma_0}{\tau}\vec{E}$$

b) En posant : $$\vec{j} = \sigma \vec{E}_0\, \mathrm{e}^{i\omega t}$$

on obtient :

$$\sigma\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sigma_0}{\tau} \quad \text{et} \quad \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{1}{1 + i\omega\tau}$$

c) On a : $$\frac{|\sigma|}{\sigma_0} = \frac{1}{(1 + \omega^2\tau^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\sigma_0 - |\sigma|}{\sigma_0} \leqslant 0{,}01 \quad \Longrightarrow \quad \frac{|\sigma|}{\sigma_0} \geqslant 0{,}99$$

Donc $$1 + \omega^2\tau^2 \leqslant \frac{1}{(0{,}99)^2} = 1{,}02$$

d'où $$\omega^2\tau^2 \leqslant 0{,}02 \quad \text{et} \quad \omega \leqslant \frac{0{,}45}{9{,}5 \cdot 10^{-14}} = 1{,}5 \cdot 10^{12}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

5) a) D'après la question *4)*, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t} + \frac{\vec{j}}{\tau} = \frac{\sigma_0}{\tau}\vec{E}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{div}\,\vec{j}) + \frac{1}{\tau}\,\mathrm{div}\,\vec{j} = \frac{\sigma_0}{\tau}\,\mathrm{div}\,\vec{E}$$

Comme $$\mathrm{div}\,\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathrm{div}\,\vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\sigma_0}{\tau}\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

b) On cherche une solution de la forme :

$$\rho = \rho_0\, \mathrm{e}^{\alpha t}$$

L'équation différentielle devient :

$$\alpha^2 + \frac{\alpha}{\tau} + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \tau} = 0$$

D'après la 2e question :

$$\frac{\sigma_0}{\tau} = \frac{ne^2}{m} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} = \omega_{\mathrm{p}}^2$$

d'où l'équation du second degré en α :

$$\alpha^2 + \frac{\alpha}{\tau} + \omega_{\mathrm{p}}^2 = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_{\mathrm{p}}^2$$

Si $\omega_{\mathrm{p}}\tau \gg 1$ ce discriminant est négatif et par suite :

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2\tau} + i\omega_{\mathrm{p}} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2\tau} - i\omega_{\mathrm{p}}$$

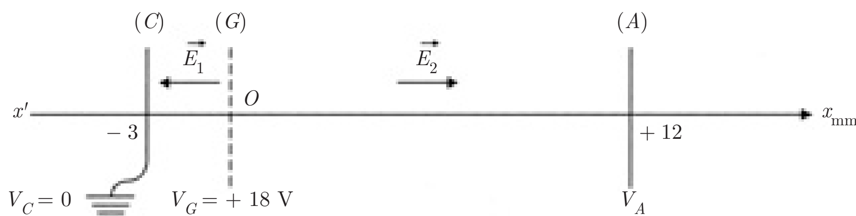
On en déduit :

$$\rho = \mathrm{e}^{\frac{-t}{2\tau}}(A\mathrm{e}^{+i\omega_{\mathrm{p}}t} + B\mathrm{e}^{-i\omega_{\mathrm{p}}t})$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\rho = \rho_0\, \mathrm{e}^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega_{\mathrm{p}}t + \varphi) \qquad \text{(sinusoïde amortie)}$$

6.5.



1) a) L'énergie mécanique E_{m} de l'électron est constante tout au long de son mouvement entre la cathode et l'anode.

$$E_{\mathrm{m}}(C) = E_{\mathrm{m}}(G)$$

Étant donné les conditions initiales :

$$E_{\mathrm{m}}(C) = E_{\mathrm{c}}(C) + E_{\mathrm{p}}(C) = 0$$

On a alors : $$0 = \frac{1}{2}\,mv_G^2 - eV_G$$

$$v_G = \sqrt{\frac{2eV_G}{m}}$$

d'où $$v_G = 2{,}52 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Le champ électrique $\vec{E}_1$ est perpendiculaire à la cathode et à la grille, et dirigé dans le sens des potentiels décroissants, donc de (G) vers (C). Sa norme est :

$$E_1 = \frac{V_G}{d} = \frac{18}{3 \cdot 10^{-3}} = 6\,000 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

c) $$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = ne = 10^{15} \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}$$

$$i = 1{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ A} = 0{,}16 \text{ mA}$$

2) a) La conservation de l'énergie mécanique permet d'écrire :

$$E_\mathrm{m}(C) = E_\mathrm{m}(A) \quad \text{soit} \quad O = \frac{1}{2}\,mV_A^2 - eV_A$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2eV_A}{m}}$$

d'où $$v_A = 2{,}30 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) $\vec{E}_2$ a la direction et le sens de l'axe $x'Ox$, sa norme est

$$E_2 = \frac{18 - 15}{12 \cdot 10^{-3}} = 250 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

c) Chaque électron arrivant sur l'anode a une énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}\,mv_A^2 = eV_A$$

$$= 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 15 = 24 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

n étant le nombre d'électrons émis par seconde, on a :

$$P = nE_c = 10^{15} \times 24 \cdot 10^{-19} = 24 \cdot 10^{-4} \text{ W}$$

3) a) On a toujours : $$E_\mathrm{m} = 0 = \frac{1}{2}mv_A'^2 - eV_A'$$

Pour que les électrons arrivent sur l'anode avec une vitesse nulle, il faut donc $V'_A = 0$.

b) Si $V_A < 0$, l'électron rebrousse chemin avant d'atteindre l'anode.

c) $\vec{E}_2$ étant uniforme, on a $V(x) = ax + b$ avec :

– pour $x = 0$ $\quad V = 18$ V $\Longrightarrow \quad b = 18$ V

– pour $x = 12 \cdot 10^{-3}$ $\quad V = V_A \Longrightarrow \quad V_A = 12 \cdot 10^{-3} a + 18$

soit
$$a = \frac{V_A - 18}{12 \cdot 10^{-3}}$$

La loi de variation de V entre O et A est :

$$V = \left(\frac{V_A - 18}{12}\right) 10^3\, x + 18$$

Au point où les électrons rebroussent chemin, on a :

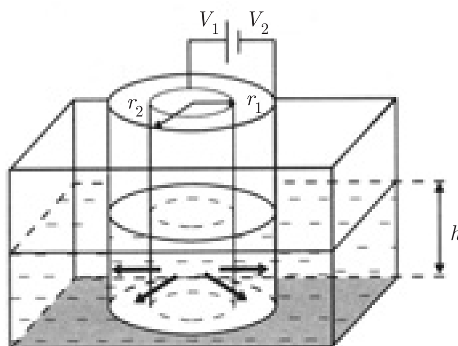
$$v = 0 \quad \Longrightarrow \quad eV = 0$$

soit
$$V = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{-18 \times 12 \cdot 10^{-3}}{V_A - 18}$$

A.N. : Pour $V_A = -15$ V on trouve $x = 6{,}55$ mm.

6.6. *1)* On a :

$$\vec{j}(r) = \sigma \vec{E}(r) \quad \text{et} \quad \int_{S(r)} \vec{j} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = I.$$



Par symétrie, le vecteur densité de courant est radial centrifuge.

$$j = \frac{I}{2} = \frac{I}{2\pi r h} = \frac{1}{\rho} E$$

d'où
$$E = \frac{\rho I}{2\pi r h}$$

On a aussi

$$V_1 - V_2 = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad \Longrightarrow V_1 - V_2 = \frac{\rho I}{2\pi h} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

On en déduit : $$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

A.N. : $$R = \frac{20}{2 \times \pi \times 0{,}15} \ln 5 = 34{,}15\ \Omega$$

2) Au voisinage de l'électrode centrale, la densité de courant est :

$$j_1 = \frac{I}{S_1} = \frac{V_1 - V_2}{R} \times \frac{1}{2\pi r_1 h}$$

$$j_1 = \frac{V_1 - V_2}{\rho r_1 \ln \dfrac{r_2}{r_1}} = 18{,}64\ \text{A} \cdot \text{m}^{-2}$$

3) $j_1(r_1)$ sera minimal quand la fonction $f(r_1) = r_1 \ln \dfrac{r_2}{r_1}$ sera maximale.

$$\frac{\text{d}}{\text{d}r_1}\left(r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{r_2}{r_1} = e$$

$$r_1 = \frac{r_2}{e} = 1{,}84\ \text{cm}$$

r_1	0	$\frac{r_2}{e}$	r_2
$\frac{\text{d}}{\text{d}r_1}[f(r_1)]$	$+$	0	$-$
$f(r_1)$	↗		↘

Le tableau de variation de la fonction $f(r_1)$ montre bien que pour $r_1 = \dfrac{r_2}{e}$, $f(r_1) = \dfrac{r_2}{e}$ est maximal, donc $j_1(r_1) = \dfrac{V_1 - V_2}{\rho \dfrac{r_2}{e}}$ sera minimal.

On obtient : $$j_1(r_1) = 16{,}31\ \text{A} \cdot \text{m}^{-2}.$$

6.7. *1)* **Cas d'un récepteur polarisé**

Prenons comme sens positif pour parcourir les mailles le sens trigonométrique et adoptons les sens des courants indiqués par les flèches.

a) Récepteur disposé comme l'indique la figure 1.

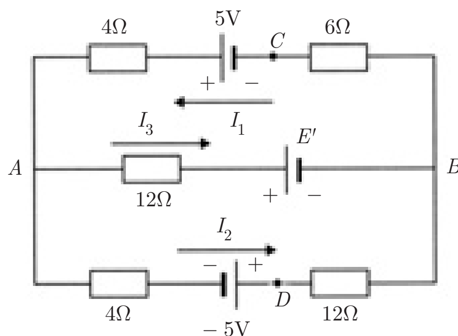


FIG. 1

Les lois de Kirchhoff permettent d'écrire :

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 & \text{(nœud } A\text{)} \\ 12I_3 + E' + 6I_1 - 5 + 4I_1 = 0 & \text{(maille } ABCA\text{)} \\ 4I_2 - 5 + 12I_2 - E' - 12I_3 = 0 & \text{(maille } ADBA\text{)} \end{cases}$$

ou encore

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ 10I_1 + 12I_3 &= 5 - E' \\ 16I_2 - 12I_3 &= 5 + E' \end{aligned}\right\} \implies I_3 = \frac{30 - 26E'}{472}$$

Si $E' = 2$ volts, on a $I_3 < 0$ et par conséquent le courant I_3 réel est de sens opposé à celui de la figure 1 : le récepteur (M) joue le rôle de générateur.

b) Récepteur disposé comme l'indique la figure 2.

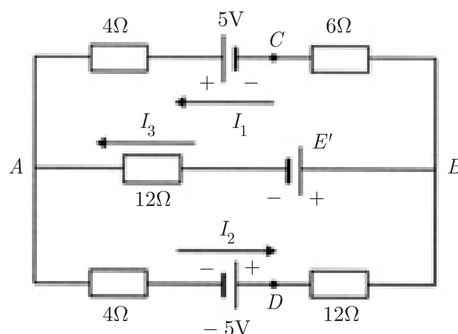


FIG. 2

Dans ce cas, les lois de Kirchhoff donnent :

$$\left.\begin{array}{l} I_2 = I_1 + I_3 \\ 10I_1 + 12I_3 = 5 + E' \\ 16I_2 + 12I_3 = 5 - E' \end{array}\right\} \implies I_3 = \frac{30 + 26E'}{472}$$

On pouvait déduire ce résultat du cas précédent, en changeant E' en $-E'$ et I_3 en $-I_3$. Là encore, si $E' = 2$ volts, on obtient $I_3 < 0$; le courant I_3 réel est de sens opposé à celui de la figure 2, le récepteur (M) se comporte bien comme un générateur.

2) **Cas d'un récepteur non polarisé**

Pour que (M) joue le rôle de récepteur et qu'il se polarise, il faut que le courant réel I_3 soit dans le sens choisi au départ pour obtenir cette polarisation.

a) Supposons que le courant I_3 va de A vers B : c'est le cas de la figure 1, où (M) se comporte comme un récepteur. Pour $E' = 2$ V, on aura :

$$I_3 = \frac{30 - 26E'}{472} = \frac{-22}{472} = -0{,}046 \text{ A} \qquad (1)$$

solution inacceptable puisque $I_3 < 0$.

b) Supposons que I_3 va de B vers A :

C'est le cas de la figure 2, où (M) se comporte encore comme un récepteur. On aura :

$$I_3 = -\frac{30 + 26E'}{472} = \frac{-82}{472} = -0{,}173 \text{ A} \qquad (2)$$

solution également inacceptable pour la même raison. Par conséquent, la seule solution est $I_3 = 0$.
Cette condition ne peut être remplie par l'équation (2) correspondant au cas de la figure 2.
Seul reste acceptable le cas de la figure 1. En considérant que E' croît de 0 à une valeur finale E'_f au fur et à mesure que le récepteur se polarise, la condition $I_3 = 0$ dans l'équation (1) implique que :

$$30 - 26E'_f = 0 \quad \text{soit} \quad E'_f = \frac{30}{26} = 1{,}15 \text{ kV}$$

Par conséquent, à l'équilibre, le récepteur ne peut être que partiellement polarisé.

On en déduit alors : $I_1 = I_2 = I$

La loi de Kirchhoff appliquée à la maille *ADBCA* permet d'écrire :

$$4I - 5 + 12I + 6I - 5 + 4I = 0$$

$$26I = 10 \quad \text{soit} \quad I = 0{,}385 \text{ A}$$

7

Réseaux électrocinétiques Régimes variables

7.1. DIPÔLES ÉLECTROCINÉTIQUES

Un dipôle électrocinétique est une portion de circuit comportant deux bornes (par lesquelles entre ou sort le courant). On appelle *caractéristique* du dipôle le graphe de la tension u à ses bornes en fonction de l'intensité i qui le traverse, ou bien celui de i en fonction de u. Des exemples en sont donnés au paragraphe **7.1.4**.

7.1.1 Conventions de signe

On utilise, selon les cas, les deux conventions de la figure pour le sens positif du courant et le sens de la tension.

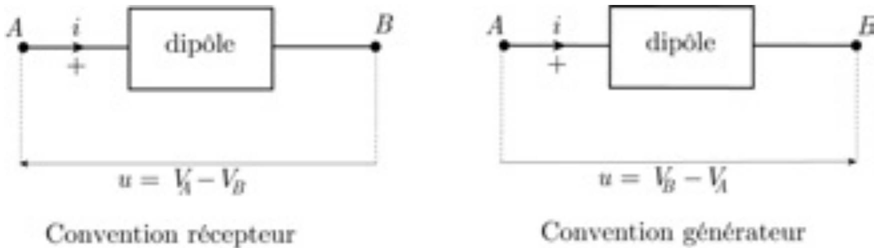


FIG. 7.1

7.1.2 Puissance électrique reçue par un dipôle

Nous adoptons ici la convention récepteur. Si $\mathrm{d}q = i\ \mathrm{d}t$ est la charge totale qui a circulé dans le dipôle entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, le travail correspondant des forces électriques exercées sur les porteurs est :

$$\mathrm{d}W = u\ \mathrm{d}q = ui\ \mathrm{d}t$$

La puissance reçue par le dipôle à l'instant t est donc :

$$\boxed{P = ui} \tag{7.1}$$

7.1.3 Condensateur et inductance

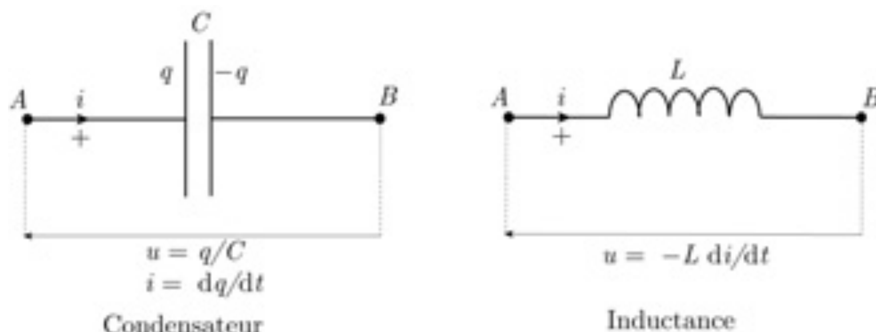


FIG. 7.2

Avec la convention récepteur on a les relations (notez bien les conventions choisies sur la figure pour le condensateur) :

$$u = \frac{q}{C} \qquad i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{7.2}$$

De même pour une inductance (appelée aussi *self*) :

$$u = L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{7.3}$$

Rappelons que l'inductance s'exprime en henry (H) dans le système international.

7.1.4 Exemples de dipôles

FIG. 7.3

7.2. RÉPONSE D'UN CIRCUIT À UN ÉCHELON DE TENSION

Le régime transitoire correspondant à l'établissement du courant dans un circuit comportant une source de tension est caractérisé par la réponse de ce circuit à un *échelon de tension*, c'est-à-dire à une tension de la forme :

$$e = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0$$
$$e = E \quad \text{pour} \quad t > 0$$

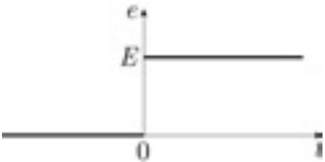


FIG. 7.4

7.2.1 Circuit *R, L*

La loi des mailles s'écrit (figure 7.5) :

$$L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri - E = 0$$

Soit, en posant $\tau = L/R$:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{Ri}{L} = \frac{E}{L} \qquad (7.4)$$

Une solution particulière de cette équation est précisément la solution constante correspondant au régime continu :

$$i_0(t) = \frac{E}{R}$$

En posant $L/R = \tau$, l'équation homogène correspondante admet la solution générale :

$$i_1(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

La solution générale de (7.4) est donc :

$$i(t) = E + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

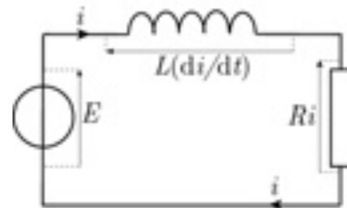


FIG. 7.5

La présence de l'inductance impose la continuité du courant : $i(0^+) = i(0^-) = 0$. Par conséquent :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)} \qquad (7.5)$$

$\tau = L/R$, qui est homogène à un temps, est appelé *la constante de temps du circuit*. Celle-ci permet d'évaluer l'ordre de grandeur de la durée pratique du régime transitoire; en effet au bout du temps τ l'intensité ne diffère plus de sa valeur en continu que de $1/\mathrm{e} \simeq 37\,\%$ et au bout de 5τ elle n'en diffère plus que de $0{,}7\,\%$.

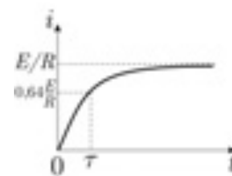


FIG. 7.6

On pourrait penser que l'intensité augmente indéfiniment si l'on supprime la résistance, mais il faut noter qu'il n'existe pas de dipôle constitué par une inductance pure car une bobine possède toujours une résistance, même très faible.

7.2.2 Circuit *R*, *C*

■ Courant de charge du condensateur

Avec les conventions d'orientation de la figure on a :

$$i = + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad u = \frac{q}{C}$$

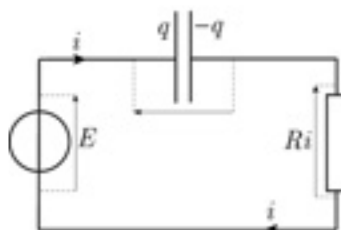


FIG. 7.7

La loi des mailles s'écrit successivement :

$$u + Ri - E = 0$$

$$u + RC \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - E = 0$$

Soit, en définissant la constante de temps du circuit $\tau = RC$:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{\tau} = \frac{E}{\tau} \tag{7.6}$$

La solution particulière constante correspond au régime stationnaire, soit :

$$u_0(t) = E$$

L'équation homogène correspondante admet la solution générale :

$$u_1(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

La solution générale de (7.6) est donc :

$$u(t) = E + A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Soit, compte tenu que $u(0) = 0$ à $t = 0$:

$$\boxed{u(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)} \tag{7.7}$$

expression valable évidemment pour $t \geqslant 0$.
Comme on pouvait s'y attendre u tend vers E quand t tend vers l'infini.
On en déduit $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$:

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}} \tag{7.8}$$

On note que $i(0^+) = E/R$ n'est pas nul : l'intensité du courant subit théoriquement une discontinuité au départ de la charge. En fait, le circuit possède toujours une inductance aussi faible soit-elle et il n'y a pas de véritable discontinuité.

■ Courant de décharge du condensateur

Lorsque l'on court-circuite le condensateur, initialement sous la tension constante E, la source de tension s'écrit :

$$e = E \quad \text{pour} \quad t < 0$$
$$e = 0 \quad \text{pour} \quad t > 0$$

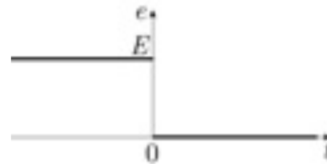


FIG. 7.8

Avec les conventions de la figure, on a :

$$i = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad u = \frac{q}{C}$$

Loi des mailles :

$$u - Ri = 0$$
$$u + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0$$
$$u + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$$

On retrouve l'équation homogène :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{\tau} = 0$$

dont la solution générale est :

$$u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

La tension étant continue, on a $u(0) = E$ et, par suite :

$$\boxed{u(t) = E\,\mathrm{e}^{-t/\tau}} \tag{7.9}$$

On a de même $i = -\mathrm{d}q/\mathrm{d}t = -C\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, ce qui donne en explicitant τ :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}} \tag{7.10}$$

On note là aussi la discontinuité du courant.

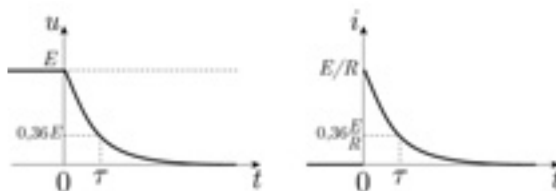


FIG. 7.9

Exemple 1. Courant de fuite dans un condensateur

Un condensateur de capacité $C = 1\ \mu$F présente un courant de fuite entre ses armatures. On modélise le phénomène par un circuit R,C : le condensateur se décharge dans une résistance $R = 80$ MΩ.

1) Calculer la constante de temps de la décharge et en déduire le temps au bout duquel la charge du condensateur a diminué de moitié.

On a $\tau = RC = 10^{-6} \times 80 \cdot 10^6 = 80$ s. La charge évolue suivant la même loi que la tension. Elle a diminué de moitié quand $\mathrm{e}^{-t/\tau} = 1/2$, soit :

$$-\frac{t}{\tau} = -\ln 2 \simeq 0{,}7 \qquad \text{d'où} \qquad t = 0{,}7 \times 80 = 48\,\text{s}.$$

2) Quelle est l'intensité initiale de décharge si l'on isole le condensateur après l'avoir chargé sous la tension $E = 100$ V? Que vaut-elle au bout de 48 s ?

L'intensité initiale est $i_0 = E/R = 1{,}25\ \mu$A. Elle aura diminué de moitié après 48 s, soit 0,68 μA.

7.2.3 Circuit *R, L, C*

■ Décharge du condensateur

Loi des mailles :

$$u - Ri - L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

On obtient ainsi :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{LC} = 0} \qquad (7.11)$$

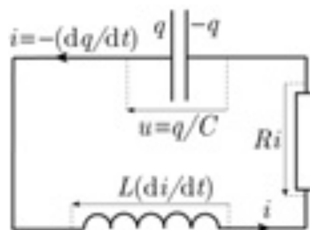


FIG. 7.10

On reconnaît l'équation d'un oscillateur linéaire amorti.
La nature des solutions dépend du caractère réel ou imaginaire des solutions du polynôme caractéristique de cette équation différentielle (c'est-à-dire du signe de son discriminant) :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

en posant :

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \qquad \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{7.12}$$

est la pulsation propre de l'oscillateur non amorti (soit pour $R = 0$) et

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} \tag{7.13}$$

est le *facteur de qualité* de l'oscillateur.

Rappelons les différents cas en supposant $u(0) = E$ et $i(0) = 0$ et en notant que la présence de l'inductance impose la continuité du courant :

Régime oscillatoire amorti

(racines imaginaires conjuguées : $Q < 1/2$ et $\omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/4Q^2}$)

$$u = E\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t/2Q}\left(\cos\omega t + \frac{\omega_0}{2Q\omega}\sin\omega t\right) \tag{7.14}$$

$$i = -CE\,\frac{\omega_0^2}{\omega}\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t/2Q}\sin\omega t \tag{7.15}$$

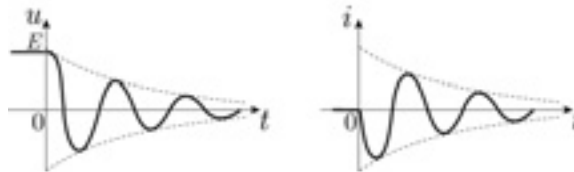


FIG. 7.11

Régime critique

(racine double réelle : $Q = 1/2$, soit $R^2 - 4L/C = 0$)

$$u = E\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left(1 + \frac{R}{2L}t\right) \tag{7.16}$$

$$i = -\frac{R^2CE}{4L^2}\,t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} \tag{7.17}$$



FIG. 7.12

Régime hypercritique

(racines réelles distinctes négatives : $Q < 1/2$)
Les racines sont :

$$r_1 = \omega_0\left(-\frac{1}{2Q} - \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right) \quad \text{et} \quad r_2 = \omega_0\left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)$$

La solution est de la forme :

$$u = A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B\,\mathrm{e}^{r_2 t} \tag{7.18}$$

$$i = -C\left(r_1 A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + r_2 B\,\mathrm{e}^{r_2 t}\right) \tag{7.19}$$

Les courbes représentatives sont analogues à celles du régime critique, avec un retour à zéro plus lent.

Dans tous les cas, u et i tendent vers zéro quand t tend vers l'infini.

■ Réponse à un échelon de tension

L'équation (7.11) devient (pour $t > 0$) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}} \tag{7.20}$$

La solution particulière est encore la constante E que l'on doit ajouter aux solutions trouvées pour $u(t)$ dans les trois cas envisagés précédemment et qui constitue donc le régime continu vers lequel tend le circuit. On aura donc avec $u(0) = 0$ et $i(0) = 0$:

Régime oscillatoire

$$u = E\left[1 - \mathrm{e}^{-\omega_0 t/2Q}\left(\cos\omega t + \frac{\omega_0}{2Q\omega}\sin\omega t\right)\right] \tag{7.21}$$

$$i = CE\,\frac{\omega_0^2}{C\omega}A\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t/2Q}\left(\cos\omega t + \frac{\omega_0}{2Q\omega}\sin\omega t\right) \tag{7.22}$$

Régime critique

$$u = E\left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\left(1 + \frac{R}{2L}t\right)\right] \tag{7.23}$$

$$i = \frac{R^2CE}{4L^2}\,t\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} \tag{7.24}$$

7.3 CIRCUITS EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Nous supposerons le régime sinusoïdal quasi-stationnaire, c'est-à-dire l'intensité du courant uniforme dans le circuit, ce qui est pratiquement toujours réalisé à l'échelle du laboratoire, mais ne le serait pas pour des fils télégraphiques par exemple.

7.3.1 Méthode de la représentation complexe

La méthode de la représentation complexe est très utile pour déterminer l'amplitude et la phase à l'origine d'une fonction sinusoïdale résultant de la superposition de vibrations sinusoïdales. Elle est fondée sur la propriété suivante : la partie réelle d'une combinaison *linéaire* de complexes est la combinaison linéaire correspondante de leurs parties réelles. Elle simplifie toutes les opérations *linéaires* sur les fonctions sinusoïdales, y compris les opérations de dérivation et d'intégration. Elle ne s'applique pas par contre aux calculs non linéaires (calcul de la puissance électrique instantanée, par exemple).

■ Superposition d'oscillations du type $y_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

L'oscillation résultante est sinusoïdale de même fréquence, soit $y = A\cos(\omega t + \varphi)$. On en détermine l'amplitude A et la phase à l'origine de la façon suivante.

On pose $y_1 = Re\widetilde{A}_1\, \mathrm{e}^{i\omega t}$, $y_2 = Re\widetilde{A}_2\, \mathrm{e}^{i\omega t}$, $y = Re\widetilde{A}\, \mathrm{e}^{i\omega t}$ avec $\widetilde{A}_1 = A_1\, \mathrm{e}^{i\varphi_1}$, etc. (*amplitudes complexes*). Dans ces conditions l'amplitude complexe de l'oscillation résultante est la somme des amplitudes complexes :

$$\widetilde{A} = \widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2 \qquad (7.25)$$

Notez bien que les amplitudes réelles ne s'ajoutent pas, excepté dans le cas où les vibrations sont en phase.

Par identification des parties réelle et imaginaire, il vient :

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (7.26)$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \qquad (7.27)$$

■ Dérivation et intégration

La méthode est également très utile pour effectuer la dérivation ou l'intégration d'une fonction sinusoïdale en la transformant en une simple multiplication ou division : dériver $\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi)}$, c'est la multiplier par $i\omega$, l'intégrer c'est la diviser par $i\omega$.

■ Valeur moyenne d'un produit de fonctions sinusoïdales

Attention ! La méthode ne vaut que pour des superpositions, c'est-à-dire pour des expressions linéaires, elle est inutilisable pour des formes quadratiques par exemple : le produit de deux grandeurs sinusoïdales ne peut se faire que sous forme réelle car la partie réelle du produit de deux complexes n'est pas égale au produit des parties réelles.

Cependant, on peut utiliser la relation suivante entre les amplitudes complexes $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ de deux grandeurs sinusoïdales $f(t)$ et $g(t)$ de même fréquence pour calculer la valeur moyenne sur une période du produit fg :

$$\overline{f(t)\,g(t)} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\big(\widetilde{F}\,\widetilde{G}^*\big) \qquad (7.28)$$

7.3.2 Dipôle *R, L, C* en régime sinusoïdal

Le dipôle R, L, C de la figure est alimenté par une source délivrant la tension :

$$u = U_\mathrm{m} \cos\omega t$$

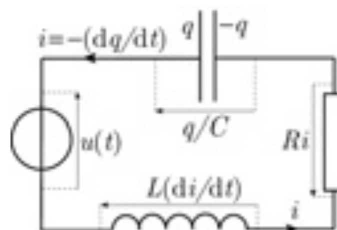


FIG. 7.13

■ Loi d'Ohm complexe. Impédance

Il s'agit de trouver l'intensité $i(t)$ du courant en régime quasi stationnaire, c'est-à-dire en négligeant le régime transitoire d'établissement du courant.
La loi des mailles s'écrit, avec les conventions d'orientation de la figure :

$$Ri + L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} - u(t) = 0$$

On obtient l'équation différentielle de la charge du condensateur en dérivant cette équation par rapport au temps et en substituant $i = +\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$:

$$R\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + L\,\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{q}{C} - U_\mathrm{m}\cos\omega t = 0$$

soit :

$$LC\,\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + RC\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + q = CU_\mathrm{m}\cos\omega t \qquad (7.29)$$

Il faut donc trouver une solution particulière de cette équation, laquelle représente le régime stationnaire. Cette solution est nécessairement sinusoïdale et il est commode d'utiliser ici la représentation complexe.

Nous conviendrons dorénavant de mettre systématiquement un tilde (~) à la grandeur complexe ($\widetilde{x}$) associée à une grandeur réelle donnée x et nous noterons j le symbole des imaginaires pour éviter toute confusion avec les intensités des courants.

En posant :

$$q(t) = \mathrm{Re}\,\widetilde{q}(t) \qquad \text{et} \qquad u(t) = \mathrm{Re}\,\left(U_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{j\,\omega t}\right)$$

l'équation (7.29) devient :

$$LC\,\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{q}}{\mathrm{d}t^2} + RC\,\frac{\mathrm{d}\widetilde{q}}{\mathrm{d}t} + \widetilde{q} = CU_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{j\,\omega t} \qquad (7.30)$$

Il est évident que l'on peut trouver une solution particulière de cette équation sous la forme :

$$\widetilde{q} = \widetilde{Q}_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{j\,\omega t}$$

En reportant cette expression dans (7.30), il vient après simplification par $\mathrm{e}^{j\,\omega t}$:

$$\left(1 - LC\omega^2 + j\omega RC\right)\widetilde{Q}_\mathrm{m} = CU_\mathrm{m}$$

Or,

$$\widetilde{i} = \frac{\mathrm{d}\widetilde{q}}{\mathrm{d}t} = i\omega\ \widetilde{Q}_\mathrm{m}\, \mathrm{e}^{j\,\omega t} \qquad \Longrightarrow \qquad \widetilde{i} = \widetilde{I}_\mathrm{m}\, \mathrm{e}^{j\,\omega t} \quad \text{avec} \quad \widetilde{I}_\mathrm{m} = j\omega\ \widetilde{Q}_\mathrm{m}$$

Il vient ainsi, après division des deux membres par C :

$$\left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right]\widetilde{I}_\mathrm{m} = U_\mathrm{m} \tag{7.31}$$

La quantité :

$$\boxed{\widetilde{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \tag{7.32}$$

s'appelle *l'impédance complexe* du dipôle.
L'expression (7.31) généralise la loi d'Ohm pour un conducteur ohmique :

$$(\text{loi d}'\text{Ohm complexe}) \qquad \boxed{U_m = \widetilde{Z}\ \widetilde{I}_\mathrm{m}} \tag{7.33}$$

On vérifie que l'on retrouve la loi d'Ohm habituelle si l'on supprime le condensateur et l'inductance. Notez que l'impédance se mesure en ohm dans le système international.
On peut écrire l'impédance complexe sous la forme :

$$\widetilde{Z} = Z\, \mathrm{e}^{j\varphi}$$

$$\text{avec} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)^2} \ \text{et}\ \varphi = \arctan\frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R} \tag{7.34}$$

Par conséquent $\widetilde{I}_\mathrm{m} = U_\mathrm{m}/\widetilde{Z} = I_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{-j\varphi}$ de sorte que l'on a :

$$i(t) = \mathrm{Re}\left(I_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{-j\varphi}\,\mathrm{e}^{j\,\omega t}\right) = I_\mathrm{m}\cos\ (\omega t - \varphi)$$

L'expression (7.32) montre que φ est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

Le module de l'impédance complexe permet de calculer l'amplitude du courant $I_\mathrm{m} = U_\mathrm{m}/Z$ et son argument φ est le déphasage de la tension appliquée au dipôle par rapport au courant.



La loi d'Ohm complexe a une conséquence importante :



Les lois des circuits linéaires en courant continu s'appliquent en régime sinusoïdal à des associations quelconques de dipôles élémentaires R, L ou C, à condition de considérer les *amplitudes complexes* des courants et des tensions et les *impédances complexes* de ces éléments.

En particulier, les lois des associations de résistances vues au chapitre **6.6** s'appliquent aux impédances complexes (mais pas à leurs modules !) :

■ Association en série

Impédance équivalente : $\widetilde{Z} = \widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2$

■ Association en parallèle

Impédance équivalente : $\dfrac{1}{\widetilde{Z}} = \dfrac{1}{\widetilde{Z}_1} + \dfrac{1}{\widetilde{Z}_2}$ (cf. figure 7.14)

■ Loi des nœuds. Admittance

La loi d'Ohm peut s'écrire de la façon équivalente suivante, commode pour écrire la loi des nœuds aux bornes de plusieurs dipôles en parallèle :

$$\widetilde{I} = \widetilde{Y}\,\widetilde{U} \qquad (7.35)$$

La quantité :

$$\widetilde{Y} = \frac{1}{\widetilde{Z}} \qquad (7.36)$$

s'appelle l'*admittance* complexe du dipôle.

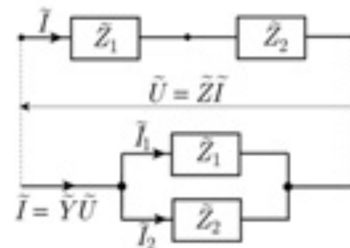


FIG. 7.14

La figure 7.15 représente les impédances des dipôles linéaires élémentaires (résistance, inductance pure, capacité pure).
L'impédance (l'admittance) est *réelle positive pour un conducteur ohmique, imaginaire pure pour une inductance pure et pour une capacité pure* ; l'inductance déphase la tension de $+\pi/2$ sur le courant (*quadrature avance*), la capacité déphase la tension de $-\pi/2$ (*quadrature retard*).

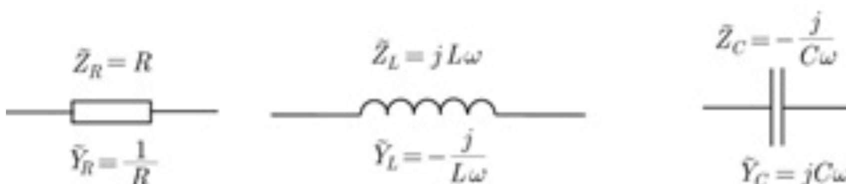


FIG. 7.15

Exemple 2. Condensateur en régime sinusoïdal

Un condensateur de capacité 3,2 μF est soumis à une tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz. Calculer l'impédance du condensateur et le déphasage de la tension appliquée, par rapport au courant. La tension maximale appliquée étant de 300 V, quelle est l'amplitude de l'intensité du courant dans le circuit ?

L'expression (7.32) se réduit à :

$$\widetilde{Z} = -\frac{j}{C\omega} = \frac{\mathrm{e}^{-j\,\pi/2}}{C\omega}$$

La tension est donc en retard de $\pi/2$ sur le courant et la valeur de l'impédance du condensateur est :

$$Z = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{314 \times 3{,}2 \cdot 10^{-6}} \quad \text{soit} \quad Z \simeq 1000\ \Omega$$

Par suite, $I_\mathrm{m} = U_\mathrm{m}/Z = 0{,}3$ A.

Exemple 3. Bobine alimentée en courant sinusoïdal de haute fréquence

1) Une bobine de résistance $r = 200\ \Omega$ et d'inductance $L = 64$ mH est soumise à une tension sinusoïdale de fréquence $f = 5$ kHz. Calculer son impédance et le déphasage de la tension sur le courant.

On a :

$$\widetilde{Z} = r + jL\omega = r + j\ 2\pi f L$$

$$Z = \sqrt{r^2 + (2\pi f L)^2} = \sqrt{4 \cdot 10^4 + (2 \times \pi \times 5 \cdot 10^3 \times 0{,}064)^2}$$

$$= \sqrt{4 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^6} \simeq 2000\ \Omega$$

$$\tan\varphi = \frac{2\pi f L}{r} = \frac{2000}{200} = 10 \quad \text{et} \quad \varphi \simeq 84°$$

La tension est donc pratiquement en avance de phase de $\pi/2$ sur le courant. Le rôle de la résistance est négligeable ($r \ll L\omega$).

2) Même question si la bobine est alimentée sous 50 Hz.

On trouve $Z = \sqrt{4 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2} \simeq 200\ \Omega$ et $\tan\varphi = 0{,}2$, soit $\varphi = 11{,}3°$ $\simeq \pi/8$: l'avance de phase de la tension sur le courant est faible et c'est la résistance qui joue un rôle prédominant $(L\omega \ll r)$.

■ Résonance d'intensité dans le dipôle R,L,C

Lorsque l'on fait varier la pulsation, l'amplitude de l'intensité $I_\mathrm{m} = U_\mathrm{m}/Z$ passe par un maximum I_M quand Z est minimal, c'est-à-dire pour la pulsation de résonance ω_0 correspondant à :

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \tag{7.37}$$

On a donc à la résonance :

$$\boxed{\widetilde{Z} = R} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = 0} \tag{7.38}$$



À la résonance d'intensité, le courant et la tension sont en phase ; l'impédance du dipôle est réelle et égale à sa résistance.

Par conséquent :

$$I_\mathrm{M} = \frac{U_\mathrm{m}}{R}$$

L'impédance du condensateur et l'impédance due à l'inductance L de la bobine sont égales. Si la résistance est inférieure à celle du condensateur, alors les tensions aux bornes de celui-ci et de la bobine seront supérieures à la tension appliquée U_m (*surtension*). Le rapport de surtension est :

$$\frac{U_\mathrm{C}}{U_\mathrm{m}} = \frac{I_\mathrm{M}/C\omega_0}{RI_\mathrm{M}} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}$$

Ainsi, le rapport de surtension à la résonance est égal au facteur de qualité Q du circuit du dipôle et la pulsation de résonance coïncide avec la pulsation propre des oscillations libres du circuit.

7.3.3 Puissance moyenne consommée dans un dipôle

■ Expression générale

En régime stationnaire (ou quasi stationnaire) lorsqu'une charge $\mathrm{d}q$ entre par la borne A d'un dipôle pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$, il ressort la même

charge par sa borne B. Le dipôle reçoit ainsi l'énergie $V_A\,\mathrm{d}q$ et perd l'énergie $V_B\,\mathrm{d}q$ durant $\mathrm{d}t$. Au total il a reçu l'énergie :

$$\mathrm{d}W = (V_A - V_B)\,\mathrm{d}q = u\,\mathrm{d}q$$

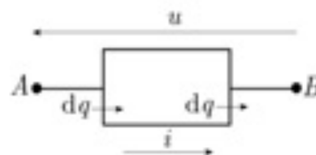


FIG. 7.16

la puissance électrique mise en jeu dans le dipôle est donc :

$$\mathcal{P} = u\,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

soit, en fonction de l'intensité i dans le dipôle :

$$\boxed{\mathcal{P} = ui} \qquad (7.39)$$

Notez le caractère général de la relation (7.39), valable pour un dipôle quelconque en régime stationnaire (continu) ou quasi stationnaire.

■ Puissance moyenne en courant sinusoïdal

Si $u = U_\mathrm{m}\cos\omega t$ et $i = I_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$, soit $\widetilde{u} = U_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{i\,\omega t}$ et $\widetilde{i} = I_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{i\,(\omega t+\varphi)}$, on obtient directement la valeur moyenne P de la puissance en utilisant la relation (7.28) :

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(U_\mathrm{m} I_\mathrm{m}\,\mathrm{e}^{-i\,\varphi}\right) \qquad \text{soit :}$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\,U_\mathrm{m} I_\mathrm{m}\cos\varphi} \qquad (7.40)$$

Comme on a $\cos\varphi = R/Z$ (*cf.* expressions (7.32) et (7.33)), cette expression peut aussi s'écrire :

$$P = \frac{U_\mathrm{m}^2}{2R} \qquad (7.41)$$

■ Valeurs efficaces

On appelle valeurs efficaces U et I du courant et de la tension respectivement l'intensité U et la tension I continues qui produiraient la même puissance P dans la résistance R, soit :

$$\boxed{U = \frac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{I = \frac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}} \qquad (7.42)$$

La puissance moyenne peut donc s'écrire également :

$$\boxed{P = UI\cos\varphi} \tag{7.43}$$

7.3.4 Théorèmes généraux des circuits linéaires

Les lois de Kirchhoff (cf. **6.8**) sont linéaires; on en déduit les théorèmes suivants, valables pour les circuits ne comportant que des dipôles actifs ou passifs *linéaires*.



• Théorème de superposition

L'intensité qui circule dans un dipôle est la somme algébrique des intensités créées dans ce dipôle par chaque générateur du réseau pris isolément (les autres générateurs étant alors remplacés par leurs impédances internes).

Ce théorème est utile lorsqu'il y a plusieurs sources de tension dans le réseau.

■ Théorème de Millmann

On définit souvent les potentiels V_k des nœuds A_k par rapport au potentiel d'un nœud de référence que l'on prend nul (*la masse*). Le théorème de Millmann traduit la loi des nœuds à l'aide des potentiels des nœuds voisins d'un nœud donné.
Ainsi, si $\widetilde{Y}_k$ est l'admittance complexe de la branche $(A_k N)$ arrivant au nœud N et *en supposant que toutes les branches arrivant en N sont des dipôles passifs linéaires*, la loi des nœuds s'écrit :

$$\sum_k \widetilde{I}_k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_k \widetilde{Y}_k\left(\widetilde{V}_k - \widetilde{V}_N\right) = 0$$

Soit :

$$\boxed{\widetilde{V}_N = \frac{\sum\limits_k \widetilde{Y}_k \widetilde{V}_k}{\sum\limits_k \widetilde{Y}_k}} \tag{7.44}$$

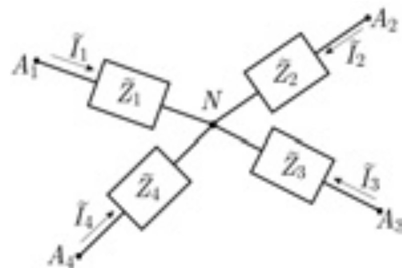


FIG. 7.17

Ce théorème est très utile pour éliminer les courants, si l'on ne s'intéresse qu'aux tensions.

Notez bien que le théorème n'est pas applicable sous cette forme si l'une des branches aboutissant en N est active, en particulier par exemple si elle impose une tension donnée (ce qui suppose la présence d'une source de tension).
Prenez garde également à ne pas oublier de compter au dénominateur les impédances des branches correspondant à des potentiels $\widetilde{V}_k$ nuls.

■ Théorème de Thévenin

Le courant qui circule dans une branche AB d'un réseau linéaire est le même que si la branche AB était alimentée par une source de tension $\widetilde{E}_{\mathrm{t}}$ égale à la tension obtenue entre A et B en supprimant la branche AB, en série avec une impédance $\widetilde{Z}_{\mathrm{R}}$ égale à l'impédance équivalente entre A et B dans les mêmes conditions.

Ce théorème est utile pour trouver l'intensité du courant dans une branche particulière du réseau.

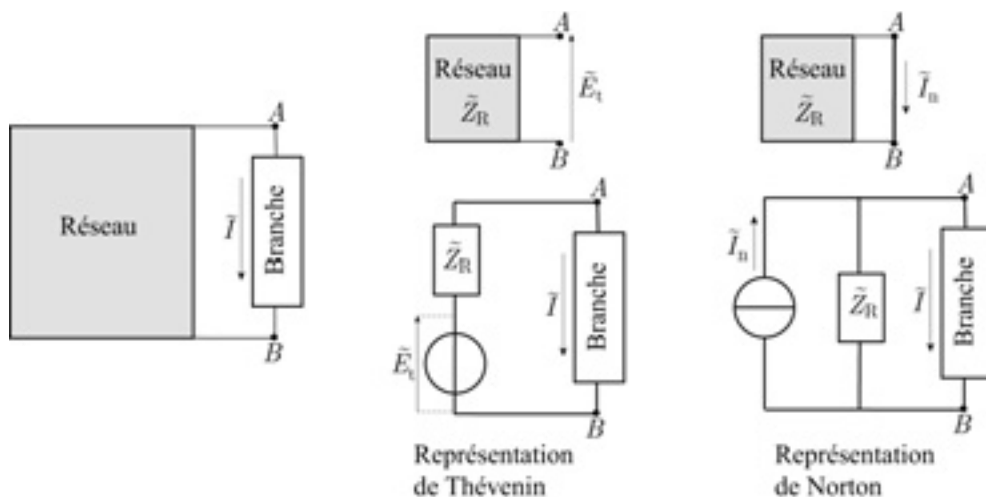


FIG. 7.18

■ Théorème de Norton

Le courant qui circule dans une branche AB d'un réseau linéaire est le même que si la branche AB était alimentée par une source de courant d'intensité $\widetilde{I}_{\mathrm{n}}$ égale à l'intensité entre A et B en remplaçant la branche AB par un court-circuit, en parallèle avec une impédance $\widetilde{Z}_{\mathrm{R}}$ égale à l'impédance équivalente entre A et B dans les mêmes conditions.

Ce théorème est surtout utilisé en électronique dans des circuits comportant des transistors, car ceux-ci font office de sources de courant.

EXERCICES

7.1. Surtension à l'ouverture d'un interrupteur

1) Le circuit d'une lampe à incandescence allumée peut être schématisé par une résistance et une inductance alimentées en régime stationnaire par une source de tension continue E.
Déterminer la tension $u(t)$ aux bornes de l'interrupteur après l'ouverture de celui-ci (figure 7.19). On considérera que l'interrupteur ouvert équivaut à une très faible capacité C en série dans le circuit.

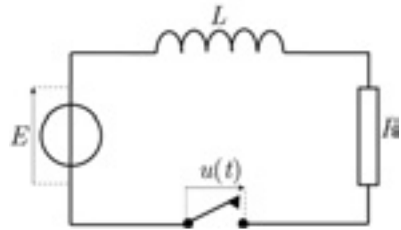


FIG. 7.19

2) Calculer la constante de temps du circuit, la période des oscillations non amorties et la valeur maximale U_m atteinte par $u(t)$ en fonction de E. On donne :

$$R = 100\ \Omega \qquad L = 10^{-5}\ \text{H} \qquad C = 10^{-13}\ \text{F}.$$

7.2. Oscillations de relaxation d'une lampe au néon

Une ampoule au néon (L) ne s'allume que si la tension u entre ses bornes atteint la tension V_a (tension d'allumage). Elle reste allumée tant que u reste supérieure à une tension d'extinction $V_e < V_a$. Lorsque la lampe est éteinte sa résistance est pratiquement infinie ; elle prend la valeur r lorsqu'elle est allumée.

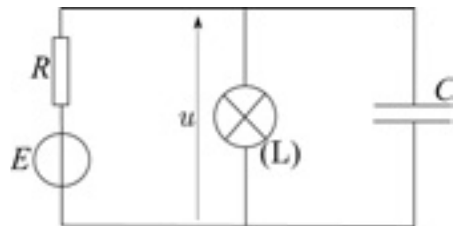


FIG. 7.20

On réalise le schéma de la figure 7.20 avec une source de tension continue E.

1) Étudier la tension $u(t)$ en fonction du temps (on supposera $u(0) = 0$), dans le cas où un régime périodique s'établit. Préciser le domaine des valeurs possibles de la tension appliquée E.

2) Tracer le graphe de $u(t)$ et calculer la période T des oscillations, avec les valeurs numériques suivantes :

$$V_a = 90\text{V} \qquad V_e = 75\text{V} \qquad r = 5 \cdot 10^3\ \Omega$$
$$C = 1\ \mu\text{F} \qquad R = 2 \cdot 10^4\ \Omega \qquad E = 125\text{V}.$$

7.3. Adaptation d'impédance

Une source de tension sinusoïdale d'amplitude E et d'impédance $\widetilde{z}$ est utilisée pour alimenter un dipôle d'impédance $\widetilde{Z}$. Comment faut-il choisir $\widetilde{Z}$ pour que la puissance moyenne absorbée par le dipôle soit maximale ?

7.4. Bande passante d'un dipôle *R*,*L*,*C* série

La largeur de la bande passante $\Delta\omega$ d'un dipôle R,L,C série est la largeur du pic représentant l'intensité efficace $I(\omega)$ dans le dipôle alimenté à tension efficace U constante. On définit cette bande passante comme l'ensemble des pulsations (ou des fréquences) pour lesquelles l'intensité efficace est supérieure à $I_r/\sqrt{2}$ où I_r est sa valeur à la résonance.

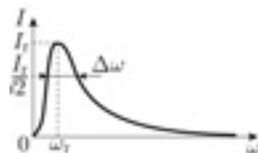


FIG. 7.21

1) Calculer $\Delta\omega$.

2) Montrer que le facteur de qualité Q du circuit peut s'écrire :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

3) Calculer la fréquence de résonance ν_0, le facteur de qualité et la bande passante en fréquence $\Delta\nu$ du dipôle si $L = 4$ mH, $C = 0{,}4\ \mu$F, $R = 120\ \Omega$.
Quelle serait le rapport de l'intensité I_1 à l'intensité I_r pour la fréquence $\nu_1 = 0{,}9\ \nu_0$? Conclure.

7.5. Représentation « parallèle » d'une bobine réelle

Une bobine réelle est normalement représentée par une inductance L et une résistance r en série. Montrer que si la pulsation ω de la tension sinusoïdale appliquée est telle que $r \ll L\omega$, on peut alors la représenter par un dipôle constitué d'une inductance L et d'une résistance R en parallèle que l'on exprimera en fonction de L,r,ω.

7.6. Circuit bouchon

1) Montrer qu'un dipôle constitué d'un condensateur (capacité C) et d'une bobine d'indutance L et de résistance négligeable ne laisse pas passer le courant pour une fréquence ω_0 que l'on déterminera.

2) On désire éliminer des signaux de fréquence égale à 500 Hz dans un circuit. On intercale pour cela dans le circuit un dipôle constitué par une bobine d'inductance 0,25 H et de résistance 16 Ω en parallèle avec un condensateur.
Quelle doit être la capacité de celui-ci ? Quelle est alors l'impédance de ce dipôle ?

7.7. Étude d'une branche dans un circuit

Dans le circuit de la figure 7.22, on donne $i_2 = I_0 \cos \omega t$ ainsi que L, C, R. Calculer $u(t)$, $i_1(t)$ et le déphasage φ de u par rapport à la tension v aux bornes du condensateur. On exprimera les phases de $u(t)$ et $i_1(t)$ en fonction de φ.

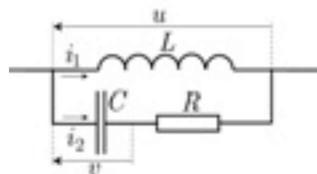


FIG. 7.22

7.8. Filtre

La tension d'entrée du filtre de la figure 7.23 est (en volt) :

$$u_1(t) = 120 \sin 300t + 120 \sin 600t$$

Calculer la tension de sortie $u_2(t)$ en circuit ouvert.

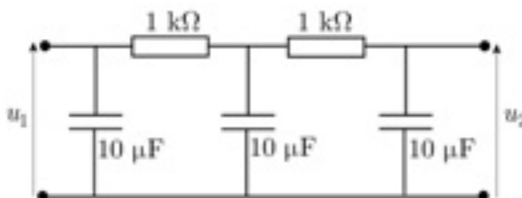


FIG. 7.23

7.9. Pont déphaseur

Une tension $v(t) = V_0 \cos \omega t$ est appliquée entre les points A et B de la figure 7.24, tandis que la tension $u(t) = U_0 \cos (\omega t - \varphi)$ est prélevée entre les points M et N.

1) Montrer que $V_0 = U_0$ en circuit ouvert entre M et N quand $RC = R_1 C_1$.

2) Trouver le déphasage φ lorsque cette condition est réalisée. Quelle est la valeur de φ si $R = 1/C\omega$?

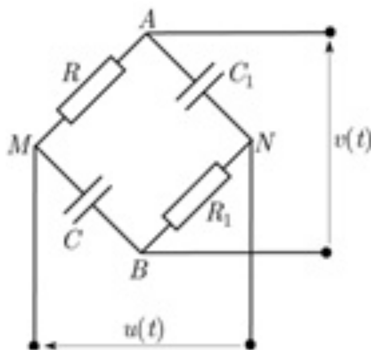


FIG. 7.24

7.10. Pont de mesure de Nernst

On considère le dipôle AB de la figure 7.25 (*Pont de Nernst*) alimenté par une source de tension sinusoïdale de fréquence $f = 5$ kHz et dans lequel R_1, R_2, R_3 sont des boîtes de résistances variables étalonnées, C_3 une boîte de capacités également étalonnées, C et R représentent la capacité et la résistance de fuite en parallèle d'un condensateur inconnu.
Le pont est dit en équilibre lorsque la différence de potentiel entre les points M et P est nulle, ce que l'on vérifie en connectant un oscilloscope entre M et P.

1) On désigne par $\widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2, \widetilde{Z}_3, \widetilde{Z}$ les impédances complexes des branches (AM), (AP), (MB), (PB) respectivement. Montrer que lorsque le pont est à l'équilibre on a la relation :

$$\widetilde{Z}_1 \widetilde{Z} = \widetilde{Z}_2 \widetilde{Z}_3$$

2) Déterminer R et C, sachant que l'équilibre du pont est réalisé pour :

$R_1 = 25\ \Omega$; $R_2 = 100\ \Omega$;

$R_3 = 170\ \text{k}\Omega$; $C_3 = 3{,}6 \cdot 10^{-7}$F.

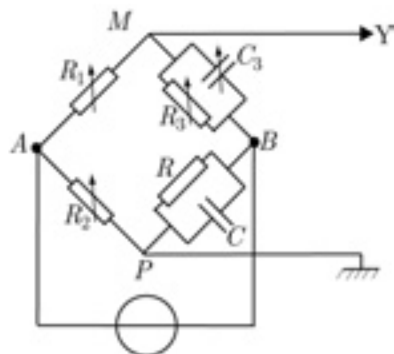


FIG. 7.25

7.11. Le circuit de la figure 7.26 comporte une bobine de résistance négligeable et d'inductance $L = 0{,}32$ H, une capacité $C = 67$ nF, une résistance $R = 10\,000\ \Omega$ et les sources de tension $e_1(t) = 30\cos(1000\pi t)$, $e_2(t) = 150\cos(1000\pi t + \pi/2)$ (mesurées en volt).

1) Calculer les impédances Z_L de la bobine et Z_C du condensateur.

Calculer la tension $u(t)$ et l'intensité du courant $i(t)$ dans le conducteur ohmique en utilisant :

2) le théorème de superposition ;

3) le théorème de Thévenin ;

4) le théorème de Norton ;

5) le théorème de Millmann.

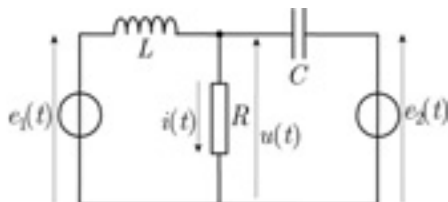


FIG. 7.26

CORRIGÉS

7.1. Surtension aux bornes d'un interrupteur

1) La loi des mailles s'écrit :

$$L\,\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri - E = u(t) = \frac{q}{C}$$

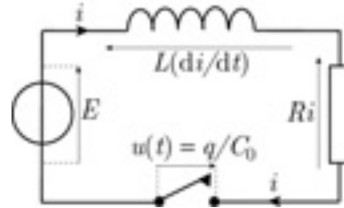


FIG. 7.27

soit, avec $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t = C\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ et $\tau = L/R$:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{LC} = E$$

C étant très faible, le discriminant de l'équation caractéristique de l'équation homogène est certainement négatif. On a donc une solution de la forme :

$$u(t) = E + (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

Avant l'ouverture de l'interrupteur l'inductance ne joue aucun rôle, le courant est continu et a pour intensité $I = E/R$. L'inductance impose la continuité du courant, c'est-à -dire de $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$, et donc *a fortiori* celle de la tension u :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left[\left(-\frac{1}{\tau}A + \omega B\right)\cos\omega t + \left(-\frac{1}{\tau}B - \omega A\right)\sin\omega t\right]\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

Soit, à $t = 0$:

$$E = E + A \quad\Longrightarrow\quad A = 0 \qquad \text{(continuité de } u\text{)}$$

$$i(0) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) \quad\Longrightarrow\quad \frac{E}{R} = C\omega B \qquad \text{(continuité de } i\text{)}$$

En définitive :

$$\boxed{u(t) = E\left(1 + \frac{1}{RC\omega}\sin\omega t\right)\ \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$$

2) La constante de temps du circuit est :

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{10^{-5}}{10^2} \qquad \text{soit} \qquad \tau \simeq 6\cdot 10^{-7}\text{s.}$$

Si l'on néglige l'amortissement, la période des oscillations est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{10^{-5}\times 10^{-13}} \qquad \text{soit} \qquad T_0 \simeq 6\cdot 10^{-9}\text{s.}$$

T_0 est donc petit devant τ : la pseudo-période des oscillations du circuit considéré est donc pratiquement égale à T_0 et l'on peut considérer que, lorsque $u(t)$ est maximale, $\sin \omega t = 1$ et $e^{-t/\tau} \simeq 1$. On a donc, avec $\omega = 1/\sqrt{LC} = 10^9 \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$:

$$U_m \simeq E\left(1 + \frac{1}{RC\omega}\right) = E\left(1 + \frac{1}{10^2 \times 10^{-13} \times 10^9}\right) \quad \text{soit} \quad U_m \simeq 100\ E.$$

7.2. Oscillations de relaxation d'une lampe au néon

1) Dans la première phase on ferme l'interrupteur, la tension aux bornes de la lampe est initialement nulle et la lampe est éteinte. Le condensateur se charge progressivement :

$$u = \frac{q}{C}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$$

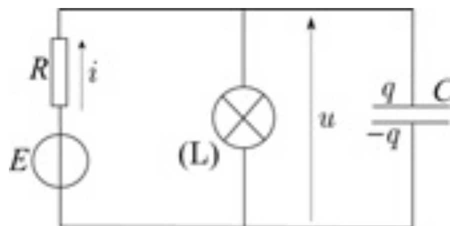


FIG. 7.28

Loi des mailles :

$$RC\frac{du}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

La solution de cette équation est (*cf.* paragraphe **7.2.2**), sachant que $u(0) = 0$ et avec $\tau = RC$:

$$u(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Si $E < V_a$, alors u ne peut atteindre V_a et la lampe reste éteinte.
Si $E > V_a$ la lampe s'allume à l'instant t_1 tel que :

$$u(t_1) = E\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right) = V_a$$

D'où :

$$t_1 = \tau \ln \frac{E}{E - V_a}$$

Dans la deuxième phase le condensateur se décharge dans la lampe qui se comporte comme une résistance en parallèle aux bornes du condensateur ; la lampe reste allumée tant que u reste supérieure à V_e. On a :

$$\left.\begin{aligned} i_c &= \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt} \\ i_r &= \frac{u}{r} \end{aligned}\right\} \implies i = C\frac{du}{dt} + \frac{u}{r}$$

$$E = u + Ri = u + RC\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{Ru}{r}$$
$$E = \tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{R}{r}\right)u$$

On obtient donc la même équation que dans la première phase en posant $\tau' = \dfrac{\tau}{1 + R/r}$ et $E' = \dfrac{E}{1 + R/r}$ Par suite, avec la condition initiale $u(t_1) = V_\mathrm{a}$, il vient :

$$u(t) = E' + A\,\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau'} = E' + (V_\mathrm{a} - E')\,\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau'}$$

On voit que u tend vers E' quand t tend vers l'infini : si $E' < V_\mathrm{e}$, alors la lampe s'éteindra à un instant t_2 et un régime périodique va s'établir. La condition est donc en définitive :

$$\boxed{V_\mathrm{a} < E < V_\mathrm{e}\left(1 + \frac{R}{r}\right)}$$

2) La deuxième phase s'achève quand $u(t_2) = V_\mathrm{e}$:

$$V_\mathrm{e} = E' + (V_\mathrm{a} - E')\,\mathrm{e}^{-(t_2-t_1)/\tau'}$$
$$t_2 - t_1 = \tau' \ln\frac{V_\mathrm{a} - E'}{V_\mathrm{e} - E'}$$

Si t_0 est l'instant où u atteint la valeur V_e dans la première phase (voir le graphe), la période des oscillations de la lampe sera :

$$T = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1)$$

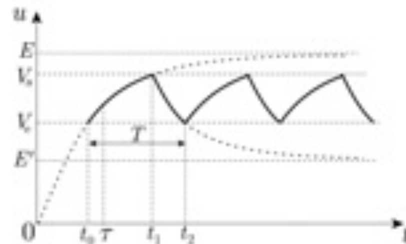


FIG. 7.29

On aura par conséquent, de même qu'au *1)* :

$$t_0 = \tau\ln\frac{E}{E - V_\mathrm{e}} \quad \text{et} \quad t_1 - t_0 = \tau\ln\frac{E - V_\mathrm{e}}{E - V_\mathrm{a}}$$

Finalement :

$$\boxed{T = \tau\ln\frac{E - V_\mathrm{e}}{E - V_\mathrm{a}} + \tau'\ln\frac{V_\mathrm{a} - E'}{V_\mathrm{e} - E'}}$$

A.N.

$$1 + \frac{R}{r} = 5 \qquad \tau = RC = 2\cdot 10^4 \times 10^{-6} = 0{,}02\ \mathrm{s}$$
$$\tau' = \tau/5 = 4\cdot 10^{-3}\mathrm{s} \qquad E' = E/5 = 25\mathrm{V}$$
$$T = 0{,}02\ln\frac{50}{35} + 4\cdot 10^{-3}\ln\frac{65}{50} \qquad \text{soit} \qquad T = 8{,}2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s}.$$

7.3. Adaptation d'impédance

La tension aux bornes du dipôle et du générateur est $\widetilde{u} = \widetilde{Z}\,\widetilde{i} = \widetilde{e} - \widetilde{z}\,\widetilde{i}$ et l'intensité du courant dans le dipôle est par conséquent :

$$\widetilde{i} = \frac{\widetilde{e}}{\widetilde{Z} + \widetilde{z}}$$

La puissance moyenne absorbée par le dipôle est donc (*cf.* paragraphe **7.3.1**) :

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\widetilde{u}\,\widetilde{i}^*\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\widetilde{Z}\,\widetilde{i}\,\widetilde{i}^*\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\frac{\widetilde{Z}E^2}{\left(\widetilde{Z} + \widetilde{z}\right)\left(\widetilde{Z}^* + \widetilde{z}^*\right)} \end{aligned}$$

soit, en posant $\widetilde{Z} = R + jS$ et $\widetilde{z} = r + js$:

$$P = \frac{1}{2}\,\frac{RE^2}{(R+r)^2 + (S+s)^2}$$

à R et r fixés, on obtiendra un maximum pour $S + s = 0$:

$$P = \frac{1}{2}\,\frac{RE^2}{(R+r)^2}$$

r étant donné, P passera par un maximum lorsque sa dérivée par rapport à R s'annule, soit si :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(R+r)^2} - \frac{2R}{(R+r)^3} &= 0 \\ (R+r) - 2R &= 0 \end{aligned}$$

En définitive il faut que :

$$\boxed{\widetilde{Z} = r - js = \widetilde{z}^*}$$

7.4. Bande passante d'un dipôle *R*,*L*,*C* série

1) On a $I_\mathrm{r} = U/R$ a la résonance, d'où :

$$I^2 = \frac{U^2}{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{U^2}{R^2}$$

soit, en égalant les dénominateurs :

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R$$

$$LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$$

Les solutions positives de ces deux équations du second degré, lesquelles ont même discriminant Δ, sont de la forme :

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\Delta} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\Delta} \quad \text{respectivement.}$$

La largeur de la bande passante est donc :

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{R}{L}}$$

2) Le facteur de qualité est :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L\omega_0}{L\,\Delta\omega}$$

soit :

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

3) Fréquence de résonance :

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{4\cdot 10^{-3} \times 4\cdot 10^{-7}}}\ \text{Hz}$$

soit : $\nu_0 \simeq 39$ kHz.

Facteur de qualité :

$$Q = \frac{2\pi\nu_0}{R} = \frac{2\pi \times 39\cdot 10^3}{120} \qquad \text{soit} \qquad Q \simeq 2000.$$

Bande passante :

$$\Delta\nu = \frac{\nu_0}{Q} = \frac{39\cdot 10^3}{2\cdot 10^3} \qquad \text{soit} \qquad \Delta\nu \simeq 20\ \text{Hz}.$$

Pour $\nu = 0{,}9\nu_0$ l'impédance du dipôle serait :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(0{,}9L\omega_0 - \frac{1}{0{,}9C\omega_0}\right)^2} = R\sqrt{1 + Q^2\left(0{,}9 - \frac{1}{0{,}9}\right)^2}$$

car $LC\omega_0^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad Q = L\omega_0/R = 1/RC\omega_0$. Par suite :

$$Z = R\sqrt{1 + 4 \cdot 10^6 \times 4 \cdot 10^{-2}} \simeq 400\ R$$

Comme $U = ZI_1 = RI_\mathrm{r}$, il en résulte que :

$$\frac{I}{I_\mathrm{r}} = \frac{R}{Z} = \frac{1}{400}$$

L'intensité est 400 fois plus faible qu'à la résonance : le dipôle R, L, C série constitue un filtre en fréquences de bande passante étroite grâce à un facteur de qualité élevé.

7.5. Représentation « parallèle » d'une bobine réelle

On doit avoir $\widetilde{U} = \widetilde{Z}\widetilde{I}$ avec :

$$\frac{1}{\widetilde{Z}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} = \frac{1}{r + jL\omega}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r + jL\omega} - \frac{1}{jL\omega} = \frac{-r}{(-L\omega + jr)\,L\omega}$$

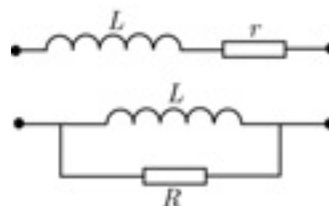


FIG. 7.30

R est réelle ; aussi, cette égalité ne peut-elle être réalisée qu'approximativement, à savoir si $r \ll L\omega$:

$$\boxed{R = \frac{L^2\omega^2}{r}}$$

7.6. Circuit bouchon

1) Calculons l'admittance complexe $\widetilde{Y}$ du dipôle et cherchons si son module s'annule, de sorte que le courant qui traverse le dipôle soit nul, pour une certaine pulsation. En parallèle, les admittances s'ajoutent (figure 7.31) :

$$\widetilde{Y} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = j\,\frac{LC\omega^2 - 1}{L\omega}$$

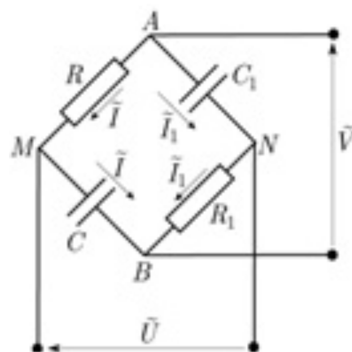


FIG. 7.31

L'admittance s'annule pour la pulsation ω_0 telle que :

$$LC\omega_0^2 = 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

2) À la fréquence 500 Hz, $L\omega = 0{,}25 \times 2\pi \times 500 \simeq 800\ \Omega \gg 16\ \Omega$. Il suffit donc de réaliser la condition $LC\omega^2 = 1$, soit :

$$C = \frac{1}{L\omega^2} = \frac{1}{0{,}25 \times 4\pi^2 \times 0{,}25 \cdot 10^6}\ \text{F} \quad \text{soit} \quad C = 0{,}4\ \mu\text{F}.$$

L'impédance complexe de la bobine est $r + jL\omega$; par suite l'admittance complexe de ce dipôle est :

$$\begin{aligned}\widetilde{Y} &= \frac{1}{r + jL\omega} + jC\omega = j\,\frac{1 - LC\omega^2 + jrC\omega}{r + jL\omega} \\ &= -\frac{rC\omega}{r + jL\omega} \simeq -\frac{rC}{L}\end{aligned}$$

La valeur de l'impédance à la fréquence de 500 Hz est donc :

$$Z = \frac{L}{rC} = \frac{0{,}25}{16 \times 0{,}4 \cdot 10^{-6}} \qquad \text{soit} \qquad Z = 39\ \text{k}\Omega.$$

7.7. Étude d'une branche dans un circuit

La loi d'Ohm s'écrit, aux bornes communes aux deux branches, à l'aide des amplitudes complexes (*cf.* figure 7.32) :

$$\widetilde{U} = jL\omega\widetilde{I}_1 = \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\widetilde{I}_2$$

Par conséquent, on a d'une part, avec $\widetilde{I}_2 = I_0$:

$$\widetilde{U} = \left(\frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}\right) I_0$$

On a donc, puisque $1/j = -j = \text{e}^{-j(\pi/2)}$:

$$U = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{C\omega}\, I_0$$

$$\text{et} \qquad \arg\widetilde{U} = \arctan(RC\omega) - \frac{\pi}{2}$$

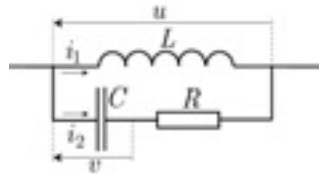


FIG. 7.32

Or,

$$\widetilde{I}_2 = jC\omega\widetilde{V} \quad \Longrightarrow \quad \widetilde{U} = \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\widetilde{V}$$

Le déphasage φ entre $u(t)$ et $v(t)$ est donc :

$$\boxed{\varphi = \arctan\left(RC\omega\right)}$$

Par suite, $\arg\widetilde{U} = \varphi - \pi/2$:

$$u(t) = \text{Re}\left(\widetilde{U}\,\mathrm{e}^{i\,\omega t}\right) = U\,\cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$$

soit enfin :

$$\boxed{u(t) = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{C\omega}\,I_0\,\sin\left(\omega t + \varphi\right)}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_1 &= \frac{\widetilde{U}}{jL\omega} = -\left(\frac{1 + jRC\omega}{LC\omega^2}\right)I_0 \\ &= -\frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{LC\omega^2}\,I_0\,\mathrm{e}^{i\varphi}\end{aligned}$$

Finalement en prenant la partie réelle de $\widetilde{I}_1\,\mathrm{e}^{i\,\omega t}$, il vient :

$$\boxed{i_1(t) = -\frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}{LC\omega^2}\,I_0\,\cos\left(\omega t + \varphi\right)}$$

Comme on pouvait s'y attendre, la tension aux bornes de l'inductance supposée pure est en quadrature avance sur le courant qui la traverse.

7.8. Filtre

Nous allons appliquer le principe de superposition, la tension d'entrée $u_1(t)$ étant la somme algébrique de deux tensions sinusoïdales de pulsations différentes, soit ω et ω'. La figure 7.33 indique les sens positifs choisis pour les courants (représentés par leurs amplitudes complexes) et tient compte de la loi des nœuds. Notez que, le circuit étant ouvert entre P et M (il n'y a pas de circuit extérieur), le courant dans les branches NP et PM est le même, ce qui n'est pas le cas dans les branches BA et AN car la tension entre A et B est imposée.

Première méthode

On a dans ces conditions, en écrivant les lois de Kirchhoff :

$$[\text{maille } (ANPMB)] \qquad \widetilde{U}_1 = \widetilde{U}_2 + R\widetilde{I}_1 + R\widetilde{I}_2 \qquad (1)$$

$$[\text{branche } (PM)] \qquad \widetilde{I}_2 = j\,C\omega\widetilde{U}_2 \qquad (2)$$

$$[\text{maille } (ANN'A)] \qquad 0 = R\widetilde{I}_2 + \widetilde{U}_2 - \frac{\widetilde{I}_1 - \widetilde{I}_2}{jC\omega} \qquad (3)$$

Il faut donc éliminer les courants de ces équations. En reportant l'expression (2) dans (1) et (3) on obtient, après avoir multiplié les deux membres de (3) par $j\,C\omega$:

$$\widetilde{U}_1 = R\widetilde{I}_1 + (1 + j\,RC\omega)\,\widetilde{U}_2 \qquad (1')$$

$$0 = -R\widetilde{I}_1 + j\,C\omega\widetilde{U}_2 + (1 + j\,RC\omega)\,j\,RC\omega \qquad (3')$$

Par addition membre à membre des équations (1′) et (3′) :

$$\widetilde{U}_1 = \left(1 - R^2C^2\omega^2 + 3j\,RC\omega\right)\,\widetilde{U}_2$$

On a donc finalement :

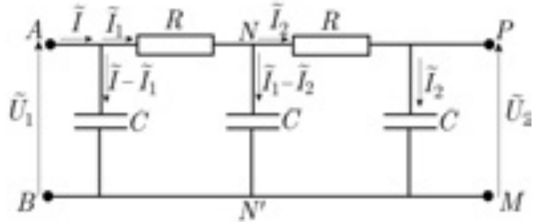


FIG. 7.33

$$\widetilde{U}_2 = K\,e^{j\,\varphi} \qquad \text{avec} \qquad K = \left[\left(1 - R^2C^2\omega^2\right)^2 + 9\,(RC\omega)^2\right]^{-1/2}$$

$$\varphi = -\arccos\left[K\left(1 - R^2C^2\omega^2\right)^2\right]$$

Avec $\omega = 300\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ on trouve :

$$K = 0{,}083 \qquad U_2 = 10\ \text{V} \qquad \varphi_2 = -2{,}30\ \text{rad}$$

Avec $\omega = 600\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ on trouve :

$$K = 0{,}025 \qquad U_2 = 3\ \text{V} \qquad \varphi_2 = -2{,}67\ \text{rad}$$

En définitive, par superposition :

$$\boxed{u_2(t) = 10\cos(300\,t - 2{,}30) + 3\cos(600\,t - 2{,}67)}$$

On note que l'amplitude de la composante du signal de sortie dont la pulsation est 600 est réduite à 30 % de celle de la pulsation fondamentale : le dispositif constitue un « filtre passe bas », c'est-à-dire ne laissant passer que les basses fréquences.

Deuxième méthode

Il était ici tout particulièrement indiqué d'utiliser le théorème de Millmann, ce qui conduit plus simplement au résultat. En posant $\widetilde{V}_B = \widetilde{V}_M = 0$, la somme des admittances des branches aboutissant au nœud N est :

$$\widetilde{Y}_N = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + j\,C\omega = \frac{2}{R} + j\,C\omega \qquad \text{d'où}$$

$$\widetilde{V}_N = \frac{\widetilde{V}_A/R + \widetilde{V}_P/R}{2/R + j\,C\omega} = \frac{\widetilde{U}_1 + \widetilde{U}_2}{2 + j\,RC\omega}$$

De même pour le nœud P :

$$\widetilde{Y}_P = \frac{1}{R} + j\,C\omega = \frac{1}{R} + j\,C\omega \qquad \text{d'où}$$

$$\widetilde{V}_P = \frac{\widetilde{V}_N/R + 0 \times j\,C\omega}{1/R + j\,C\omega} = \frac{\widetilde{U}_1 + \widetilde{U}_2}{(2 + j\,RC\omega)(1 + j\,RC\omega)}$$

Comme $\widetilde{V}_P = \widetilde{U}_2$, il vient :

$$\widetilde{U}_1 + \widetilde{U}_2 = \widetilde{U}_2\left(2 - R^2C^2\omega^2 + 3j\,RC\omega\right)$$

$$\widetilde{U}_2 = \frac{\widetilde{U}_1}{1 - R^2C^2\omega^2 + 3j\,RC\omega}$$

C'est bien le résultat obtenu plus haut.
On aurait pu être tenté d'utiliser le théorème de Millmann au nœud A plutôt qu'en P, W mais ce n'est pas possible car le circuit n'est pas ouvert entre A et B : on ne possède aucune information sur le dipôle extérieur AB, qui est ici équivalent à un générateur de Thévenin.

7.9. Pont déphaseur

1) Cherchons la relation entre les amplitudes complexes $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ des tensions $u(t)$ et $v(t)$. En circuit ouvert entre M et N, le courant est le même dans les dipôles AM et MB d'une part, dans les dipôles AN et NB d'autre part et l'on a (cf. figure 7.34) :

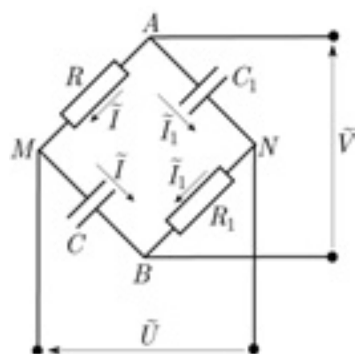


FIG. 7.34

$$\widetilde{V} = R\widetilde{I} + \frac{\widetilde{I}}{j\,C\omega} = \frac{\widetilde{I}_1}{j\,C_1\omega} + R_1\widetilde{I}_1$$

$$\widetilde{U} = -R\widetilde{I} + \frac{\widetilde{I}_1}{j\,C_1\omega}$$

En reportant $\widetilde{I}$ et $\widetilde{I}_1/j\,C_1\omega$ en fonction de $\widetilde{V}$ dans l'expression de $\widetilde{U}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\widetilde{U} &= -R\,\frac{j\,C\omega\widetilde{V}}{1+j\,RC\omega}+\frac{\widetilde{V}}{1+j\,R_1C_1\omega}\\ &= \frac{-j\,RC\omega(1+j\,R_1C_1\omega)+(1+j\,RC\omega)}{(1+j\,RC\omega)(1+j\,R_1C_1\omega)}\widetilde{V}\\ \widetilde{U} &= \frac{1+RC\,R_1C_1\omega^2}{(1+j\,RC\omega)(1+j\,R_1C_1\omega)}\widetilde{V}\end{aligned}$$

On aura $U_0 = V_0$ si le coefficient de $\widetilde{V}$ est de module 1, c'est-à-dire, en posant $RC\omega = a$ et $R_1C_1\omega = b$, si :

$$\frac{|1+ab|}{|(1+ja|\,|1+jb)|}=1$$

soit, en égalant les carrés des modules du numérateur et du dénominateur :

$$1+2ab+a^2b^2 = 1+a^2+b^2+a^2b^2 \quad\Longleftrightarrow\quad (a-b)^2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad a=b$$

On doit donc avoir $RC = R_1C_1$ et l'expression de $\widetilde{U}$ devient :

$$\widetilde{U} = \frac{1-j\,RC\omega}{1+j\,RC\omega}\widetilde{V}$$

Utilisation du théorème de Millmann

Le théorème de Millmann donne le résultat aussi simplement. Posons $\widetilde{V}_B = 0$, de sorte que $\widetilde{V}_A = \widetilde{V}$, et appliquons le théorème aux nœuds M et N :

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_M &= \frac{\widetilde{V}_A/R+j\,C\omega\widetilde{V}_B}{1/R+j\,C\omega}=\frac{\widetilde{V}}{1+j\,RC\omega}\\ \widetilde{V}_N &= \frac{\widetilde{V}_B/R_1+j\,C_1\omega\widetilde{V}_A}{1/R_1+j\,C_1\omega}=\frac{j\,R_1C_1\omega\widetilde{V}}{1+j\,R_1C_1\omega}\\ \widetilde{U} &= \widetilde{V}_M-\widetilde{V}_N=\frac{(1+j\,R_1C_1\omega)-j\,R_1C_1\omega\,(1+j\,RC\omega)}{(1+j\,RC\omega)\,(1+j\,R_1C_1\omega)}\widetilde{V}\\ &= \frac{1+RC\,R_1C_1\omega^2}{(1+j\,RC\omega)\,(1+j\,R_1C_1\omega)}\widetilde{V}\end{aligned}$$

On retrouve donc l'expression ci-dessus.

2) On a par ailleurs :

$$-\varphi = \arg\left(\frac{\widetilde{U}}{\widetilde{V}}\right) = \arg(1 - j\,RC\omega) - \arg(1 + j\,RC\omega)$$
$$= -2\arg(1 + j\,RC\omega)$$

En définitive :

$$\boxed{\varphi = 2\ \arctan(RC\omega)}$$

Pour $R = 1/C\omega$ on a :

$$\varphi = 2\ \arctan 1 = 2 \times \frac{\pi}{2} \qquad \text{soit} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

7.10. Pont de mesure de Nernst

1) Exprimons la différence de potentiel $\widetilde{V}_M - \widetilde{V}_P$ en suivant respectivement les chemins MAP et MBP, et écrivons qu'elle est nulle lorsque le pont est à l'équilibre :

$$\widetilde{V}_M - \widetilde{V}_P = -\widetilde{Z}_1\widetilde{I} + \widetilde{Z}_2\widetilde{I}' = 0$$
$$\widetilde{V}_M - \widetilde{V}_P = \widetilde{Z}_3\widetilde{I} - \widetilde{Z}\widetilde{I}' = 0$$

Par suite :

$$\frac{\widetilde{I}}{\widetilde{I}'} = \frac{\widetilde{Z}_2}{\widetilde{Z}_1} = \frac{\widetilde{Z}}{\widetilde{Z}_3} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\widetilde{Z}_1\widetilde{Z} = \widetilde{Z}_2\widetilde{Z}_3}$$

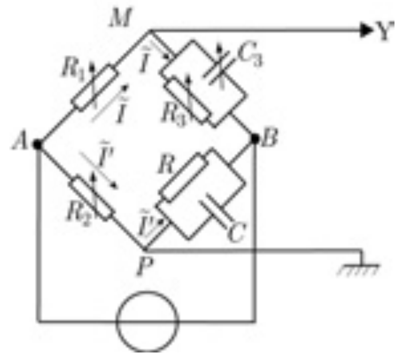


FIG. 7.35

On obtiendra aussi rapidement ce résultat avec le théorème de Millmann (poser par exemple $\widetilde{V}_B = 0$).

2) Cette relation peut s'écrire $\widetilde{Y}_1\widetilde{Y} = \widetilde{Y}_2\widetilde{Y}_3$ en utilisant les admittances $\widetilde{Y}_1 = 1/R_1$, $\widetilde{Y}_2 = 1/R_2$, $\widetilde{Y}_3 = 1/R_3 + J\,C_3\omega$, $\widetilde{Y} = 1/\widetilde{Z}$, d'où :

$$\widetilde{Y} = \frac{\widetilde{Y}_2}{\widetilde{Y}_1}\widetilde{Y}_3 = \frac{R_1}{R_2}\left(\frac{1}{R_3} + j\,C_3\omega\right)$$

soit encore :

$$\frac{1}{R} + j\,C\omega = \frac{R_1}{R_2R_3} + j\,\frac{R_1C_3\omega}{R_2}$$

On a donc :

$$\boxed{R = \frac{R_2}{R_1}R_3} \qquad \text{et} \qquad \boxed{C = \frac{R_1}{R_2}C_3}$$

A.N.

$$R = 680\ \text{k}\Omega \qquad C = 9{,}0 \cdot 10^{-8}\text{F}$$

7.11. Utilisation des théorèmes généraux

1) On a :

$$Z_L = L\omega = 0{,}32 \times 1000\,\pi \qquad \text{soit} \qquad Z_L = 10\,000\ \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{67 \cdot 10^{-9} \times 1000\,\pi} \qquad \text{soit} \qquad Z_C = 5\,000\ \Omega$$

2) Avec $e_1(t)$ seule, on a l'impédance équivalente (en ohm) :

$$\widetilde{Z}_1 = \widetilde{Z}_L + \frac{1}{R^{-1} + \widetilde{Z}_C^{-1}} = 10^4\, j + \frac{1}{10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4}\, j}$$

$$= 10^4 \left(j - \frac{1 - 2j}{5} \right) = 2 \cdot 10^3\,(1 + 3j)$$

D'où :

$$\widetilde{I}_1 = \frac{\widetilde{E}_1}{\widetilde{Z}_1} = \frac{30}{2 \cdot 10^3\,(1 + 3j)} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,(1 - 3j)$$

$$\widetilde{U}_1 = \widetilde{E}_1 - \widetilde{Z}_C \widetilde{I}_1 = 30 - 15\, j\,(1 - 3j) = -15\, j\,(1 + j)$$

Avec $e_2(t)$ seule, l'impédance équivalente est :

$$\widetilde{Z}_2 = \widetilde{Z}_C + \frac{1}{R^{-1} + \widetilde{Z}_L^{-1}} = -0{,}5 \cdot 10^4\, j + \frac{1}{10^{-4} - 10^{-4}\, j}$$

$$= 10^4 \left(-0{,}5j + \frac{1 + j}{2} \right) = 5000$$

$$\widetilde{I}_2 = \frac{\widetilde{E}_2}{\widetilde{Z}_2} = \frac{15j}{5000} = 0{,}003\, j$$

$$\widetilde{U}_2 = \widetilde{E}_2 - \widetilde{Z}_C \widetilde{I}_2 = 15\,(j - 1)$$

On a donc, par superposition :

$$\widetilde{U} = \widetilde{U}_1 + \widetilde{U}_2 = -30 \qquad \text{et} \qquad \widetilde{I} = \frac{\widetilde{U}}{R} = -3 \cdot 10^{-3} \qquad \text{d'où}$$

$$\boxed{u(t) = 30 \cos\,(1\,000\,\pi\, t + \pi)} \quad \text{(en V)}$$

$$\boxed{i(t) = 3 \cos\,(1\,000\,\pi\, t + \pi)} \quad \text{(en mA)}$$



FIG. 7.36

3) Théorème de Thévenin

Calculons l'impédance équivalente $\widetilde{Z}$ entre A et B en déconnectant la résistance (figure 7.37a) et en supprimant les sources ; $\widetilde{Z}_L$ et $\widetilde{Z}_C$ apparaissent alors en parallèle :

$$\frac{1}{\widetilde{Z}} = \frac{1}{\widetilde{Z}_C} + \frac{1}{\widetilde{Z}_L} = 2 \cdot 10^{-4} j - 10^{-4} j = 10^{-4} j \quad \text{et} \quad \widetilde{Z} = -10^4 j$$

La tension $\widetilde{E}_\mathrm{t}$ entre A et B en l'absence de R (figure 7.37b) s'obtient simplement avec le théorème de Millmann (on prend $\widetilde{V}_B = 0$) :

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_\mathrm{t} &= \frac{\widetilde{Y}_L \widetilde{V}_P + \widetilde{Y}_C \widetilde{V}_N}{\widetilde{Y}_L + \widetilde{Y}_C} = \frac{\widetilde{Y}_L \widetilde{E}_1 + \widetilde{Y}_C \widetilde{E}_2}{\widetilde{Y}_L + \widetilde{Y}_C} \\ &= \frac{-10^{-4} j \times 30 + 2 \cdot 10^{-4} j \times 15\, j}{-10^{-4} j + 2 \cdot 10^{-4} j} = 30\,(j-1) \qquad (\text{enV}). \end{aligned}$$

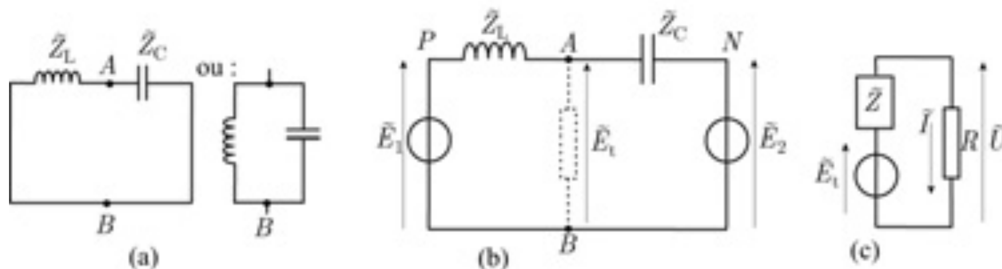


FIG. 7.37

Le schéma équivalent de Thévenin (figure 7.37c) donne enfin $\widetilde{I}$ puis $\widetilde{U}$:

$$\widetilde{I} = \frac{\widetilde{E}_\mathrm{t}}{\widetilde{Z} + R} = \frac{30(j-1)}{10^4(1-j)} = -3 \cdot 10^{-3} (\text{en A}) \quad \text{et} \quad \widetilde{U} = R\widetilde{I} = -30 (\text{en V}).$$

On retrouve les résultats de *2)*.

4) Théorème de Norton

L'admittance équivalente entre A et B a déjà été calculée : $\widetilde{Y} = 10^{-4} j$ (en ohm). Il reste donc à trouver le courant de court-circuit $\widetilde{I}_\mathrm{n}$ entre A et B.

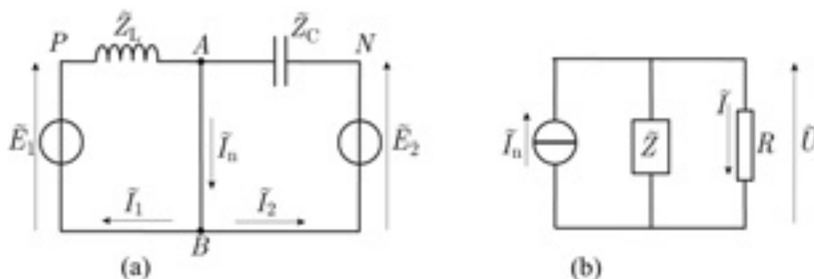


FIG. 7.38

Ce courant est la somme des courants $\widetilde{I}_1$ et $\widetilde{I}_2$ fournis par les deux sources de tension. On obtient facilement ces courants en appliquant la loi des mailles (7.38a) :

$$\widetilde{I}_1 = \frac{\widetilde{E}_1}{\widetilde{Z}_L} = \frac{30}{10^4 j} = -3 \cdot 10^{-3} j \qquad \text{[maille(PABP]}$$

$$\widetilde{I}_2 = \frac{\widetilde{E}_2}{\widetilde{Z}_C} = \frac{15 j}{-5 \cdot 10^3 j} = -3 \cdot 10^{-3} \quad \text{[maille(NABN]}$$

$$\widetilde{I}_\text{n} = \widetilde{I}_1 + \widetilde{I}_2 = -3 \cdot 10^{-3}(1 + j)$$

L'admittance équivalente aux bornes de la source de courant de Norton (figure 7.36b) permet de trouver $\widetilde{U}$:

$$\widetilde{I}_\text{n} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\widetilde{\widetilde{Z}}}\right)\widetilde{U} = \left(10^{-4} + 10^{-4} j\right)\widetilde{U}$$

D'où :

$$\widetilde{U} = \frac{-3 \cdot 10^{-3}(1 + j)}{10^{-4}(1 + j)} \qquad \text{soit} \qquad \widetilde{U} = -30\text{V} \quad \text{et} \quad \widetilde{I} = \frac{\widetilde{U}}{R} = -3 \cdot 10^{-3}\text{A.}$$

5) Théorème de Millmann

Le théorème de Millmann permet d'obtenir directement la tension $\widetilde{U}$, soit (avec $\widetilde{V}_B = 0$) :

$$\widetilde{U} = \frac{\widetilde{Y}_L \widetilde{V}_P + \widetilde{Y}_C \widetilde{V}_N + 0 \times (1/R)}{\widetilde{Y}_L + \widetilde{Y}_C + 1/R} = \frac{\widetilde{Y}_L \widetilde{E}_1 + \widetilde{Y}_C \widetilde{E}_2}{\widetilde{Y}_L + \widetilde{Y}_C + 1/R}$$

$$= \frac{-10^{-4} j \times 30 + 2 \cdot 10^{-4} j \times 15 j}{-10^{-4} j + 2 \cdot 10^{-4} j + 10^{-4}} = \frac{30 \cdot 10^{-4}(1 - j)}{10^{-4}(j - 1)} = -30\text{V.}$$

On retrouve par conséquent $\widetilde{I} = \widetilde{U}/R = -3 \cdot 10^{-3}$ A.

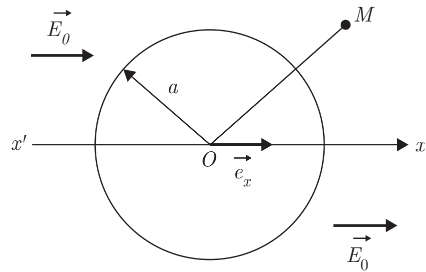
C'est donc cette méthode qui s'avère ici la plus rapide.

Problèmes d'examen corrigés

ÉNONCÉS

Problème n° 1

Une sphère métallique de rayon a, non chargée, est placée dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}_0 = E_0\,\vec{e}_x$.



1) Quel est l'effet de $\vec{E}_0$ sur cette sphère ?

2) À l'intérieur de la sphère, quel est le champ induit $\vec{E}_\text{i}$ et le champ résultant $\vec{E}_\text{r}$. Soit V_0 le potentiel en O avant l'introduction de la sphère. Quel est le potentiel à l'intérieur et sur la sphère ?

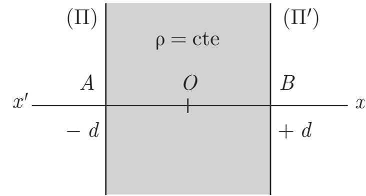
3) On se propose de calculer le potentiel en tout point extérieur à la sphère. On désigne par $\vec{P} = \alpha\vec{E}_0$ le moment dipolaire équivalent à la sphère, placé en O. Quel est le potentiel résultant $V(M)$? (On déterminera le coefficient α en exprimant la continuité de V sur la surface.)

4) En déduire les composantes radiale et orthoradiale du champ à l'extérieur de la sphère.

5) Quelle est la densité surfacique de charge σ ?

6) On suppose maintenant que $\vec{E}_0 = E_0(x)\,\vec{e}_x$ $E_0(x)$ étant une fonction lentement variable à l'échelle de a. Calculer la force qui s'exerce sur la sphère en fonction de a et de la densité volumique d'énergie $\omega = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2(x)}{2}$.

Problème n° 2



A) Deux plans parallèles infinis (π) et (π') coupent perpendiculairement l'axe $x'Ox$ respectivement aux points A et B d'abscisse $-d$ et $+d$ (voir figure).

Une distribution uniforme de charge de densité volumique ρ remplit l'espace compris entre les deux plans.

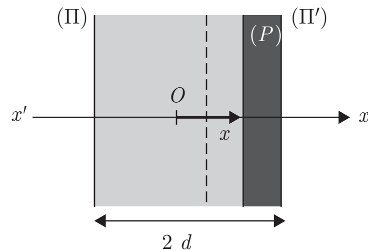
1) Montrer que le champ $\vec{E}$, créé par cette distribution de charge, est parallèle à $x'Ox$.

2) a) En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ produit par l'ensemble des charges en tout point M d'abscisse x.

b) Tracer la courbe représentant la variation de la composante E_x du champ en fonction de x.

B) Application : oscillation d'un gaz d'électrons

Soit une lame de cuivre d'épaisseur $2d$ dont les autres dimensions sont grandes devant d.



On s'intéresse au mouvement des électrons se déplaçant, par rapport au réseau d'ions positifs, perpendiculairement à la lame, suivant la direction de l'axe $x'Ox$. Dans l'état d'équilibre, le nombre d'électrons par unité de volume est n_0.

On suppose que les électrons de même abscisse x_0 subissent le même déplacement $x - x_0$. Ainsi, si $x > x_0$, le gaz d'électrons situé à droite du plan (P) d'abscisse x sera comprimé, alors que le gaz d'électrons à gauche de (P) sera dilaté : la neutralité locale n'est plus maintenue ; cependant la plaque de cuivre étant isolée, sa charge totale est nulle.

1) En faisant l'hypothèse que les densités du gaz d'électrons comprimé ou dilaté s'uniformisent instantanément, calculer les densités de charge totale (ions + électrons) ρ_d et ρ_g créés respectivement à droite et à gauche de (P) par le déplacement du plan (P) de x_0 à x.

2) En utilisant les résultats de la partie *A)*, déterminer les composantes $E_{\mathrm{d}x}$ et $E_{\mathrm{g}x}$ des champs créés sur le plan (P), d'abscisse x, par ρ_d et ρ_g. En déduire que le champ total E_x est proportionnel au déplacement $x - x_0$ de (P).

3) En négligeant l'effet de la pesanteur, quelle est la force agissant sur un des électrons du plan (P) ?

4) Montrer que cet électron a un mouvement périodique de pulsation ω_p que l'on explicitera.

Problème n° 3

Le cortège électronique d'un atome se représente d'une manière très simplifiée par une densité volumique de charge :

$$\rho(r) = \frac{A}{r^n} \quad \text{pour} \quad r \geqslant a$$

$$\rho(r) = 0 \quad \text{pour} \quad r < a$$

r étant la distance au centre O de cet atome, n, A et a sont des constantes. Le noyau, placé en O, porte la charge Ze (Z : numéro atomique de l'atome, e : valeur absolue de la charge de l'électron).

1) Calculer la charge totale q du cortège électronique.

2) Montrer que n doit être supérieur à une valeur que l'on déterminera.

3) L'atome étant neutre, exprimer la constante A.

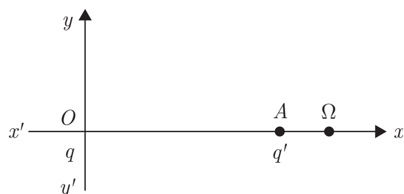
4) En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le champ électrique et le potentiel en tout point de l'espace.

5) Retrouver l'expression du champ électrique en utilisant le théorème de Gauss sous sa forme locale.

Problème n° 4

1) Deux charges électriques q et $q' = -\lambda q$ $(0 < \lambda < 1)$ sont placées, sur un axe $x'Ox$, respectivement en O et en A $(x_A = d)$.

Montrer que la surface équipotentielle $V = 0$ est une sphère (Σ) dont on déterminera les coordonnées du centre C et le rayon R en fonction de d et λ.



2) On considère maintenant une charge q placée en O et une sphère conductrice (S) reliée au sol $(V = 0)$, de même rayon R que la sphère Σ et dont le centre Ω se trouve à la distance D de q.

a) Déterminer D pour que la sphère (S) influencée par la charge q puisse être remplacée par une charge ponctuelle $-q_1$ placée en un point B de la droite $O\Omega$. On précisera la valeur de $-q_1$ et les coordonnées de B. La charge $-q_1$ est dite image électrique de la charge q par rapport à la sphère S.

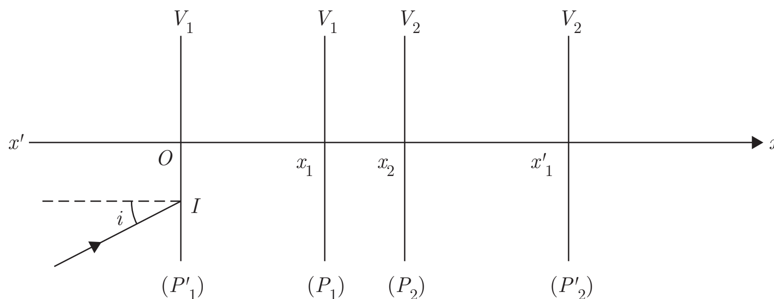
b) Quelle est la charge Q portée par la sphère (S) ?

c) Quel est le champ électrique $\vec{E}$ en un point M de la sphère ?

d) En déduire la densité surfacique de charge portée par la sphère ?

3) On maintient la charge q à la distance D de (S) mais cette fois, la sphère conductrice, initialement neutre, est isolée. En appliquant le théorème de superposition, calculer le potentiel de cette sphère.

Problème n° 5



Quatre plaques métalliques P_1', P_1, P_2, P_2' sont disposées comme l'indique la figure. On assimilera ces plaques à des plans illimités.

Les lames métalliques sont suffisamment minces pour être perméables aux électrons. (P_1') et (P_1) sont portés au potentiel V_1, (P_2) et (P_2') au potentiel V_2 avec $V_2 > V_1 > 0$.
Une source émet des électrons vers (P_1') avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. L'origine des potentiels sera prise sur la source.
Un électron dont la trajectoire rectiligne fait l'angle i avec $x'Ox$, arrive au point I sur (P_1').

1) On admet que le potentiel ne dépend que de x. Sachant que le potentiel $V(x)$ vérifie l'équation de Laplace $\dfrac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0$, calculer $V(x)$ et tracer la courbe $V(x)$. Tracer sur le même graphique la courbe représentant la norme du champ électrique $E(x)$. Quelle est la nature de la trajectoire de l'électron entre les lames (P_1') et (P_1), (P_1) et (P_2), (P_2) et (P_2') ?

2) En considérant que la vitesse v_0 est pratiquement nulle, déterminer la vitesse $v(x)$ des électrons en un point quelconque $M(x)$ en fonction de $V(x)$.

3) Montrer que la projection de la vitesse sur une normale à l'axe $x'Ox$ est constante. En déduire une relation entre les angles i_1 et i_2 que fait la trajectoire de l'électron avec $x'Ox$ aux points d'abscisse x_1 et x_2.

En comparant l'expression obtenue à celle que donne la loi de Descartes en optique pour un dioptre séparant deux milieux d'indice de réfraction n_1 et n_2 :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

montrer qu'on peut définir un indice de réfraction pour les électrons et trouver la relation de correspondance entre l'indice n et le potentiel V.

4) Quel est le rôle d'un tel dispositif dans un microscope électronique ?

On négligera, dans tout le problème, l'effet de la pesanteur.

Problème n° 6. Étude d'un réseau capacitif

On considère le circuit de la figure, dont on respectera les conventions d'orientation.

1) Établir une relation entre i_1, i_2 et i_3.

2) Écrire $V_A - V_B$ en fonction de i_1, puis i_2 et enfin i_3.

À $t = 0$ le condensateur dans la branche 1 porte une charge q_0 ; l'autre condensateur est déchargé. En déduire les valeurs initiales des intensités.

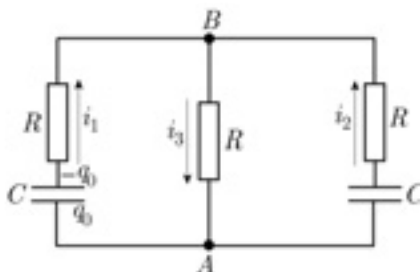


FIG. 1

3) En éliminant i_1 et i_2 des relations obtenues au *2)*, montrer que l'équation différentielle régissant i_3 peut s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + \frac{i_3}{\tau} = 0$$

avec $\tau = 3RC$.

4) Donner la solution générale de cette équation. Précisez la solution correspondant aux conditions initiales du *2)*.

5) En déduire l'équation différentielle régissant i_1 et en donner sa solution générale.

6) Donner les expressions des intensités correspondant aux conditions initiales et en faire une représentation graphique.

7) On connecte entre A et B une source de tension sinusoïdale $e(t) = e_0 \cos \omega t$. Donner l'impédance du circuit entre A et B. On étudiera ses limites pour $\omega \to \infty$ et $\omega \to 0$.
Représenter graphiquement l'amplitude de l'intensité totale dans le circuit en fonction de ω.

Problème n° 7. Filtrage

On utilise le circuit de la figure 1 pour transformer la tension d'entrée sinusoïdale u_1 en une tension de sortie u_2. On appelle *fonction de transfert* le rapport des tensions complexes $\widetilde{u}_2/\widetilde{u}_1$.

1) Donner le module et la phase de la fonction de transfert. La tension u_2 est-elle en avance ou en retard sur u_1 ?

2) Pour quelle valeur ω_c de ω le module de la fonction de transfert est-il égal à $1/\sqrt{2}$? Calculer R pour $C = 0{,}1\ \mu$F ; $f_c = 1\,000$Hz.

3) Représenter graphiquement l'allure du module et de la phase de la fonction de transfert en fonction de la pulsation ω.

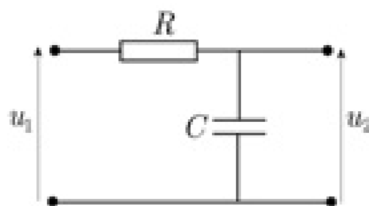


FIG. 1

4) La tension d'entrée est un signal complexe formé de l'addition de plusieurs signaux sinusoïdaux de fréquences différentes. Expliquer qualitativement comment l'amplitude relative de ces signaux sera modifiée dans la tension de sortie.

5) On envoie un signal en créneau $u_1(t)$ de pulsation ω_c en entrée. On admettra qu'un tel signal se décompose en série de Fourier de la forme :

$$u_1(t) = a \cos \omega_c t + \frac{a}{3} \cos 3\,\omega_c t + \frac{a}{5} \cos 5\,\omega_c t + \frac{a}{7} \cos 7\,\omega_c t + \cdots$$

Comparer les phases des fonctions de transfert des trois premiers harmoniques de ce développement à celle du fondamental. Faire de même avec les modules des fonctions de transfert et conclure.

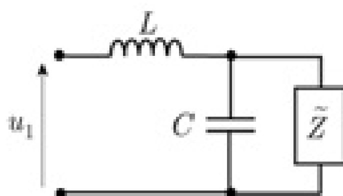


FIG. 2

6) On remplace la résistance par une inductance L et l'on connecte la sortie du filtre à

une impédance complexe $\widetilde{Z}$ (figure 2). Montrer que l'impédance équivalente à l'entrée est égale à $\widetilde{Z}$ si :

$$\widetilde{Z} = j\frac{L\omega}{2} \pm \frac{L}{2}\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}$$

quand ω est inférieure à une pulsation de coupure ω_c que l'on précisera, où bien :

$$\widetilde{Z} = j\left(\frac{L\omega}{2} \pm \frac{L}{2}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}\right)$$

quand $\omega > \omega_c$.

A.N. Calculer L pour que la fréquence de coupure soit de 2,4 kHz si $C = 2\mu F$.

7) On associe en série un grand nombre d'éléments identiques au filtre considéré au *6)*, comme indiqué sur la figure 3.
La borne commune est prise comme masse (potentiel nul), le potentiel à l'entrée est noté $u_0(t)$, le potentiel à la sortie du filtre *n* est $u_n(t)$ et l'on désigne par $i_n(t)$ l'intensité du courant sortant du filtre *n*.
On considèrera pour simplifier que les éléments sont en nombre infiniment grand : on pourra admettre dans ces conditions que l'impédance complexe équivalente $\widetilde{Z}$ à la sortie du filtre *n* est indépendante de *n*.

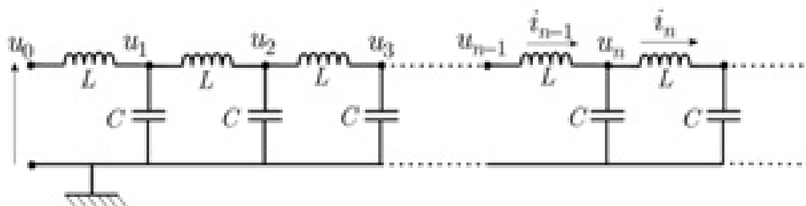


FIG. 3

Montrer que le rapport de deux potentiels successifs est :

$$\frac{\widetilde{u}_n}{\widetilde{u}_{n-1}} = \frac{\widetilde{Z} - jL\omega}{\widetilde{Z}}$$

8) On suppose $\omega < \omega_c$.
Calculer le rapport U_n/U_0 représentant le module de la fonction de transfert des *n* premiers éléments.

9) On suppose maintenant $\omega > \omega_c$.

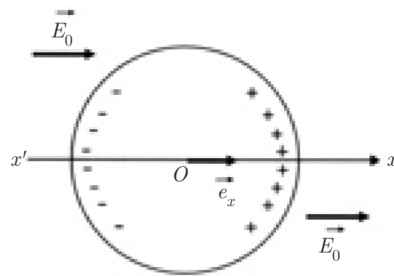
Calculer U_n/U_0 (on montrera que seule l'une des deux solutions trouvées au *6)* a une réalité physique).

A.N. Calculer U_n/U_0 pour la fréquence $f = 3$ kHz, en considérant successivement $n = 1$ et $n = 5$.

10) Représenter l'allure du graphe de U_n/U_0 en fonction de la pulsation ω.

CORRIGÉS

Problème n° 1



1) Sous l'action du champ $E_0\,\vec{e}_x$, il apparaît des charges + sur l'hémisphère droit et des charges − sur l'hémisphère gauche.

2) À l'intérieur de la sphère :

$$\vec{E}_\mathrm{r} = \vec{E}_0 + \vec{E}_\mathrm{i} = \vec{0} \Longrightarrow \boxed{\vec{E}_\mathrm{i} = -\vec{E}_0}$$

Par suite $V = V(0) = V_0$

et, par continuité :

$$\boxed{V(a) = V_0}$$

3) À l'extérieur de la sphère :

$$V(M) = V_1(M) + V_2(M)$$

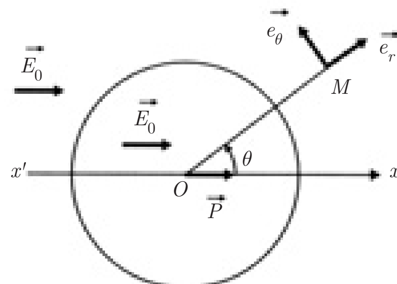
où $V_1(M)$ est le potentiel dû à $\vec{E}_0$ et $V_2(M)$ est le potentiel dû à $\vec{P}$.

$$\vec{E}_0 = E_0\,\vec{e}_x = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V_1 \implies V_1 = --E_0 x + V_0$$

avec $x = r\cos\theta$

Dans l'approximation dipolaire :

$$V_2(M) = \frac{\vec{P}\cdot\overrightarrow{OM}}{r^3}$$



$$V(M) = V_0 - E_0 r \cos\theta + \frac{KP\cos\theta}{r^2} = V_0 + \frac{K\cos\theta}{r^2}\left(P - \frac{E_0 r^3}{K}\right)$$

Sur la surface : $V(a) = V_0$

$$\vec{P} = \frac{a^3}{K}\vec{E}_0 \Longrightarrow \alpha = \frac{a^3}{K}$$

D'où : $$\boxed{V(M) = V_0 + \frac{E_0\cos\theta}{r^2}(a^3 - r^3)}$$

4) $\vec{E}(M) = E_r\vec{e}_r + E_\theta\vec{e}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{e}_\theta$

Les composantes radiale et orthoradiale du champ sont donc :

$$\boxed{\begin{aligned} E_r &= E_0\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)\cos\theta \\ E_\theta &= E_0\left(-1 + \frac{a^3}{r^3}\right)\sin\theta \end{aligned}}$$

5) À la surface d'une sphère chargée, le champ est :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_r$$

où σ est la densité surfacique de charge.

Pour $r = a$, on a :

$$\vec{E} = \vec{E}_r\,\vec{e}_r = 3E_0\cos\theta\,\vec{e}_r$$

$$\boxed{\sigma = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta}$$

6) On a : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_\text{p}$ et $\vec{E}_\text{p} = -\vec{P}\cdot\vec{E}_0$

$$\vec{F} = \left(\vec{P}\cdot\frac{\text{d}\vec{E}_0}{\text{d}x}\right)\vec{e}_x = \frac{a^3}{K}\vec{E}_0\cdot\frac{\text{d}\vec{E}_0}{\text{d}x}\,\vec{e}_x$$

soit, avec $\frac{1}{K} = 4\pi\varepsilon_0$: $\vec{F} = 4\pi a^3\,\frac{\text{d}}{\text{d}x}\left(\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\right)\vec{e}_x$

soit enfin :

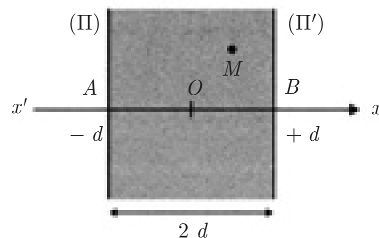
$$\boxed{\vec{F} = 4\pi a^3 \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\,\vec{e}_x}$$

La sphère se déplace dans le sens des champs croissants.

Problème n° 2

A) 1) Soit un point M quelconque. Le système physique est invariant dans toute rotation autour de la parallèle à Ox menée de M. Il doit en être de même du champ électrique $\vec{E}(M)$ qui est donc parallèle à l'axe $x'Ox$.

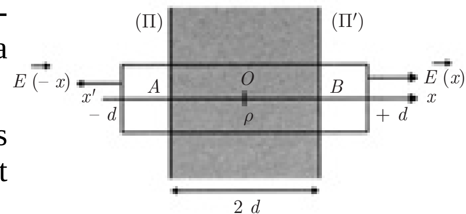
Le système est de plus invariant dans toute translation perpendiculaire à Ox.



Le champ $\vec{E}$ ne dépend donc que de l'abscisse x de M. Enfin, le système est invariant dans une symétrie par rapport au plan $x = 0$. Les champs sur les plans $x = a$ et $x = -a$ sont donc opposés, quel que soit a.

2) a) Calcul de E_x pour tout point M d'abscisse $x \geqslant d$ ou $x \leqslant -d$

On choisit comme surface de Gauss un cylindre d'axe parallèle à Ox dont les bases de surface S, symétriques par rapport à O, sont situées à l'extérieur de la distribution de charge.



L'application du théorème de Gauss donne, compte tenu que le flux latéral est nul :

$$\Phi = 2SE = \frac{(2d)S\rho}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho d}{\varepsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{ll} E_x = -\dfrac{\rho d}{\varepsilon_0} \quad \text{pour} & x \leqslant -d \\[2ex] E_x = \dfrac{\rho d}{\varepsilon_0} \quad \text{pour} & x \geqslant d \end{array}}$$

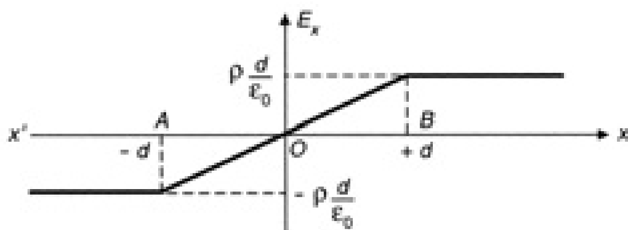
b) Calcul de E_x pour tout point M d'abscisse $x \in [-d, +d]$

Cette fois les bases du cylindre sont dans la région comprise entre (π) et (π').

On a : $$\Phi = 2SE = \frac{(2x)S\rho}{\varepsilon_0}$$

D'où : $$\boxed{E_x = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}}$$

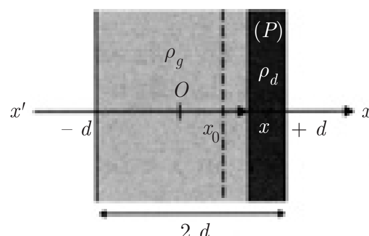
c) Courbe $E_x(x)$



B) 1) Le nombre d'électrons en excès à droite est :

$$N_\text{d} = n_0 S(x - x_0)$$

où S est la section de la plaque de cuivre.
Par suite :



$$\boxed{\rho_\text{d} = \frac{-eN_\text{d}}{S(d - x)} = -en_0\frac{x - x_0}{d - x}}$$

Le nombre d'électrons manquant à gauche est :

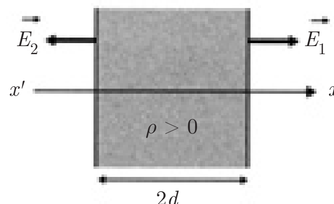
$$N_\text{g} = n_0 S(x - x_0)$$

$$\boxed{\rho_\text{g} = \frac{eN_\text{g}}{S(d + x)} = en_0\frac{x - x_0}{d + x}}$$

2) Dans la partie A), on a montré que :

$$E_{1\,x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}d \quad \text{et} \quad E_{2\,x} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}d$$

En transposant ces résultats aux distributions ρ_d et ρ_g d'épaisseurs respectives $d - x$ et $d + x$, on obtient :



$$E_{\text{d}_x} = -\frac{\rho_\text{d}}{\varepsilon_0}\frac{d - x}{2} = \frac{en_0(x - x_0)}{2\varepsilon_0} > 0$$

et $$E_{g_x} = -\frac{\rho_g}{\varepsilon_0}\frac{d+x}{2} = \frac{en_0(x-x_0)}{2\varepsilon_0} > 0$$

D'où le champ résultant :

$$\boxed{E_x = E_{gx} + E_{dx} = \frac{en_0}{\varepsilon_0}(x-x_0)}$$

3) Un électron du plan (P) est soumis à la force $F_x = -eE_x$:

$$\boxed{F_x = -\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0}(x-x_0)}$$

4) L'équation du mouvement de cet électron est :

$$m\,\frac{d^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0}(x-x_0)$$

Cette équation peut s'écrire :

$$\frac{d^2X}{\mathrm{d}t^2} + \omega_p^2 X = 0$$

en posant $X = x - x_0$ et $\omega_p^2 = \dfrac{e^2 n_0}{m\varepsilon_0}$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique. Ainsi les électrons du plan (P) ont un mouvement sinusoïdal autour de leur position d'équilibre x_0 avec une pulsation : $\boxed{\omega_p = \left(\dfrac{e^2 n_0}{m\varepsilon_0}\right)^{1/2}}$

Problème n° 3

1) À la distance r de O, la charge $q(r)$ du cortège électronique est égale à :

$$q(r) = \int_{(\tau)} \rho(r)\mathrm{d}\tau = 4\pi A \int_a^r r^{2-n}\mathrm{d}r$$

Si $n = 3$ alors $$\boxed{q = 4\pi A \ln\frac{r}{a}}$$

Si $n \neq 3$ alors $$\boxed{q = \frac{4\pi A}{3-n}(r^{3-n} - a^{3-n})}$$

2) On remarque que pour $n \leqslant 3$ on a $Q = \lim_{r\to\infty} q = \infty$,

alors que pour $n > 3$: $$Q = \frac{4\pi A}{n-3} a^{3-n}$$

3) La charge totale comprise dans la sphère de rayon $r > a$ est :

$$q'(r) = Ze + q(r)$$

La neutralité de l'atome implique que :

$$q'(\infty) = 0 \implies Ze + Q = 0 \implies Q = -Ze$$

Cette valeur finie de Q correspond au cas $n > 3$.

La constante A est déterminée par la relation :

$$\frac{4\pi A}{n-3} a^{3-n} = -Ze \quad \text{d'où :}$$

$$\boxed{A = \frac{3-n}{4\pi}\frac{Ze}{a^{3-n}} < 0}$$

4) L'atome ayant la symétrie sphérique, le champ $\vec{E}$ est radial. L'application du théorème de Gauss donne :

$$4\pi r^2 E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

où Q_{int} est la charge contenue dans la sphère de centre O et de rayon r.

a) Pour $r < a$:

$$Q_{\text{int}} = Ze \implies \vec{E} = K\frac{Ze}{r^2}\vec{e}_r$$

$$V(r) = -\int E \, \mathrm{d}r = \frac{KZe}{r} + C \quad (C = \text{constante})$$

b) Pour $r \geqslant a$:

$$Q_{\text{int}} = Ze + q(r) \text{ avec } \quad q(r) = Ze\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{n-3} - 1\right]$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{Ze}{\varepsilon_0}\left(\frac{a}{r}\right)^{n-3}$$

$$\vec{E} = \frac{KZe}{r}\left(\frac{a}{r}\right)^{n-3}\vec{e}_r$$

On a alors :

$$V(r) = \frac{KZe}{(n-2)r}\left(\frac{a}{r}\right)^{n-3} + C' \quad (C' = \text{constante})$$

La continuité du potentiel en $r = a$ donne :

$$\frac{KZe}{a} + C = \frac{KZe}{(n-2)a} \implies C = \frac{KZe}{a}\,\frac{3-n}{n-2}$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} V(r \leqslant a) &= \frac{KZe}{a}\left(\frac{a}{r} + \frac{3-n}{n-2}\right) \\ V(r \geqslant a) &= \frac{KZe}{(n-2)a}\left(\frac{a}{r}\right)^{n-4} \end{aligned}}$$

5) On peut retrouver l'expression du champ électrique, en utilisant d'une part le théorème de Gauss sous sa forme locale, div $\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, et d'autre part le principe de superposition du champ créé par le noyau placé en O et du champ créé par le cortège électronique. La symétrie sphérique du problème implique que :

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2 Er)$$

a) Champ $\vec{E}_1$ créé par le noyau :

$$\vec{E}_1 = \frac{KZe}{r^2}\,\vec{e}_r$$

b) Champ $\vec{E}_2$ créé par le cortège électronique :

– Pour $r < a$:

div $\vec{E}_2 = 0$ avec $\vec{E}_2(0) = \vec{0}$ car tous les plans passant par O sont des plans de symétrie.

On obtient $r^2E_2 = C$ et la condition au point O implique que $C = 0$.

On a donc : $$\vec{E}_2(r < a) = \vec{0}$$

– Pour $r > a$:

$$\text{div}\, E_2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{A}{\varepsilon_0 r^n}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2E_2) = \frac{A}{\varepsilon_0}r^{2-n} \quad\Longrightarrow\quad r^2E_2 = \frac{A}{\varepsilon_0}\frac{r^{3-n}}{3-n} + C'$$

avec $$A = \frac{3-n}{4\pi}\frac{Ze}{a^{3-n}}$$

soit : $$\vec{E}_2(r > a) = \left(\frac{KZe}{r^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{n-3} + \frac{C'}{r^2}\right)\vec{e}_r$$

La détermination de la constante C' se fait en écrivant la continuité du champ total en $r = a$:

$$\frac{KZe}{a^2} + 0 = \frac{KZe}{a^2} + \frac{KZe}{a^2}\left(\frac{a}{a}\right)^{n-3} + \frac{C'}{a^2}$$

Par suite :

$$C' = -KZe \qquad \text{et} \qquad \vec{E}_2(r \geqslant a) = \frac{KZe}{r^2}\left(\left(\frac{a}{r}\right)^{n-3} - 1\right)\vec{e}_r$$

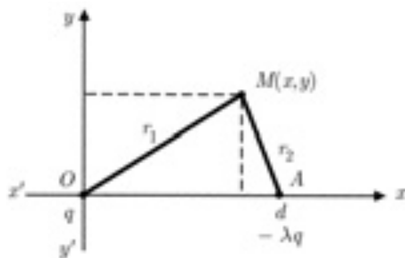
Finalement, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{KZe}{r^2}\vec{e}_r & (r \leqslant a) \\ \vec{E} &= \frac{KZe}{r^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{n-3}\vec{e}_r & (r \geqslant a) \end{aligned}}$$

Problème n° 4

1) On a : $V(M) = Kq\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{\lambda}{r_2}\right) = 0$

$$\frac{r_2}{r_1} = \lambda \quad \text{et} \quad \frac{r_2^2}{r_1^2} = \lambda^2$$



avec : $r_1^2 = x^2 + y^2$ et $r_2^2 = (x-d)^2 + y^2$

$$\frac{(x-d)^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \lambda^2$$

d'où $x^2 - 2dx + d^2 + y^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2$

soit $x^2(1-\lambda^2) - 2d\,x + y^2(1-\lambda^2) = -d^2$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme :

$$\left(x - \frac{d}{1-\lambda^2}\right)^2 - \frac{d^2}{(1-\lambda^2)^2} + y^2 = -\frac{d^2}{1-\lambda^2}$$

$$\left(x - \frac{d}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2 d^2}{(1-\lambda^2)^2}$$

Dans le plan xOy, c'est l'équation d'un cercle de centre C de coordonnées :

$$\boxed{x_C = \frac{d}{1-\lambda^2} \qquad y_C = 0}$$

et de rayon $$\boxed{R = \frac{\lambda d}{1-\lambda^2}}$$

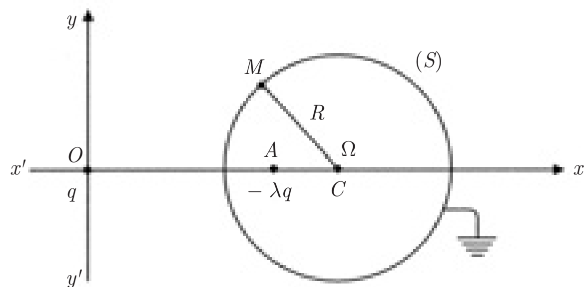
La symétrie de révolution autour de OA montre que la surface équipotentielle $V = 0$ est bien la sphère (Σ) de centre C et de rayon R.

2) a) D'après la question précédente, il suffit de prendre une charge $-q_1 = -\lambda q$ placée en B confondu avec le point A situé à la distance d de O. La surface (S) constitue l'équipotentielle (Σ) si Ω est en C. On a alors :

$$D = O\Omega = OC = \frac{d}{1-\lambda^2}$$

soit :

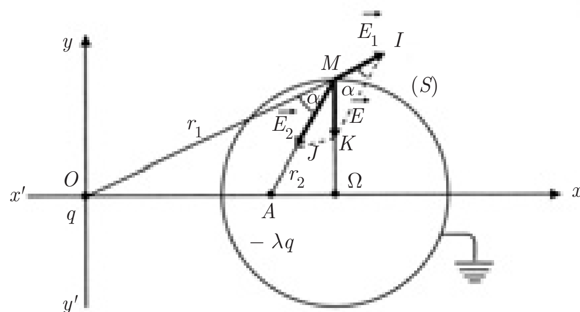
$$\boxed{D = \frac{R}{\lambda}}$$



b) On déduit de *2)* que :

$$\boxed{Q = -\lambda q}$$

c) Le champ $\vec{E}$ est la résultante des champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ créés respectivement par q et par $-\lambda q$. Ces deux champs sont dirigés suivant les droites OM et AM et leur résultante est dirigée suivant le rayon ΩM puisque (S) est une équipotentielle.



Soit respectivement *I, J, K* les extrémités des vecteurs $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ et $\vec{E}$.

Les deux triangles *MIK* et *AMO* sont semblables comme ayant un angle égal $(\widehat{MIK} = \widehat{AMO} = \alpha)$ compris entre deux côtés proportionnels $\left(\dfrac{MA}{MO} = \dfrac{r_2}{r_1} = \lambda\,;\ \dfrac{IM}{IK} = \lambda\right)$. On en déduit :

$$\frac{MK}{MI} = \frac{AO}{AM} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{d}{r_2}E_1 = \frac{Kqd}{r_1^2 r_2}$$

soit

$$\boxed{E = \frac{Kqd}{\lambda r_1^3}}$$

avec, d'après *2)* :

$$d = (1-\lambda^2)D = D - \lambda^2 D \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{R}{D}$$

$$d = D - \frac{R^2}{D} = \frac{D^2 - R^2}{D} \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{\lambda} = \frac{D^2 - R^2}{R}$$

d'où :

$$\boxed{E = Kq\frac{(D^2 - R^2)}{R} - \frac{1}{r_1^3}} \qquad (\vec{E} \text{ est orienté vers } \Omega)$$

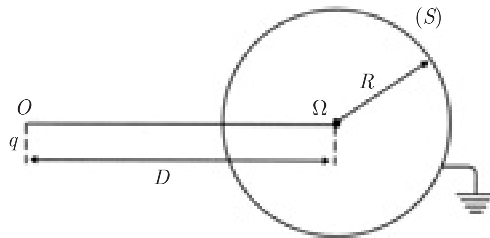
d) Le théorème de Coulomb donne :

$$\boxed{\sigma = -\varepsilon_0 E = -\frac{q(D^2 - R^2)}{4\pi R}\frac{1}{r_1^3}}$$

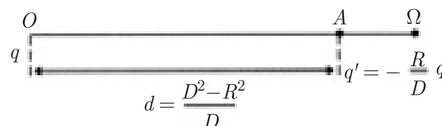
Remarque :

On vérifie que $$\int_{(S)} \sigma \, \mathrm{d}S = Q = -\lambda q$$

3) On a montré que l'état d'équilibre représenté par le schéma suivant :



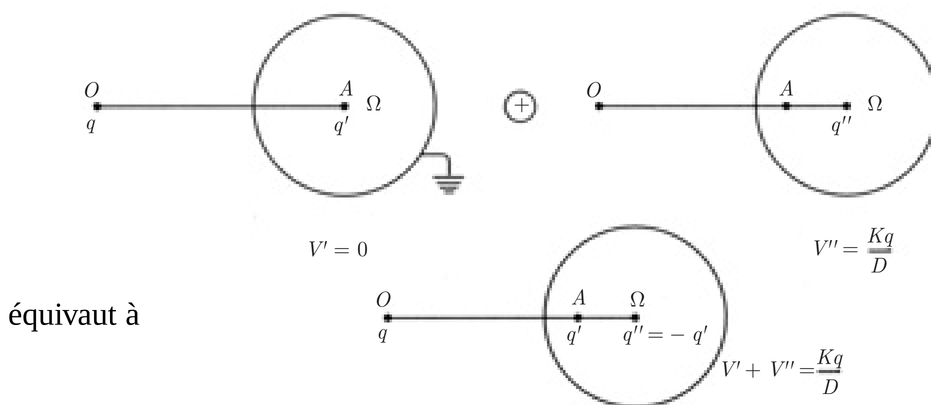
était identique, pour tout point à l'extérieur (ou au voisinage) de (S) à :



Soit le nouvel état d'équilibre constitué par la sphère (S) chargée avec $q'' = -q' = +\dfrac{R}{D}q$ et isolée. Dans ce dernier cas, la répartition de charge est uniforme sur la surface, le potentiel de la sphère est le même que si la charge q'' était placée au centre Ω soit :

$$V'' = K\frac{q''}{R} = \frac{Kq}{D},$$

En superposant ces deux états d'équilibre, on obtient l'état d'équilibre correspondant à une sphère isolée mise en présence d'une charge q placée à la distance D de son centre. Schématiquement on a :

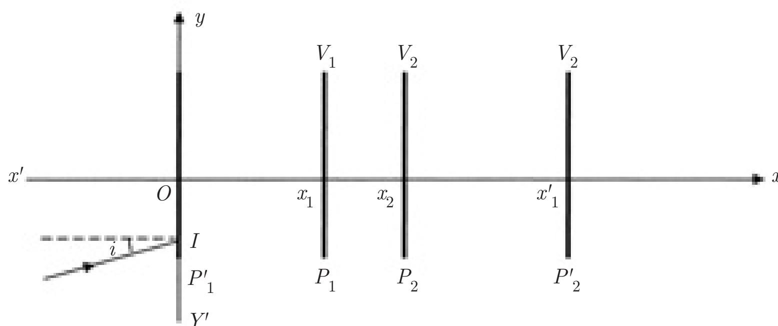


équivaut à

Le potentiel de la sphère isolée en présence de q est donc :

$$\boxed{V'' = \frac{Kq}{D}}$$

Problème n° 5



1) Le potentiel vérifie l'équation de Laplace qui s'écrit dans ce cas :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad V(x) = ax + b \qquad \text{avec :}$$

pour $\quad 0 < x < x_1 \quad \boxed{V(x) = V_1}$

pour $\quad x_1 < x < x_2 \quad V(x) = ax + b$

pour $\quad x_2 < x < x_2 \quad \boxed{V(x) = V_2}$

Par continuité du potentiel en x_1 et en x_2 :

$$V(x_1) = V_1 = ax_1 + b$$

$$V(x_2) = V_2 = ax_2 + b$$

$$a = \frac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2}$$

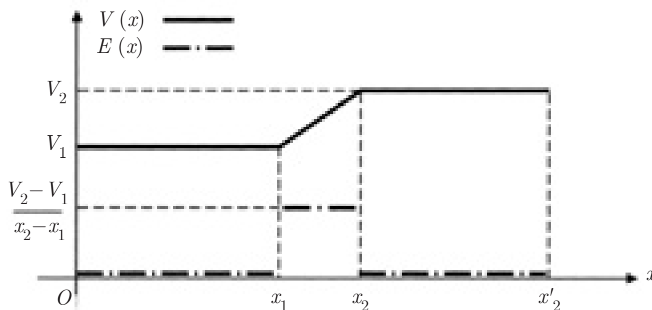
Ainsi, pour $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ on a :

$$\boxed{V(x) = \frac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1}x + \frac{V_2 x_1 - V_1 x_2}{x_1 - x_2}}$$

L'équation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ donne $E_x(x) = -\dfrac{dV(x)}{\mathrm{d}x}$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{pour} & 0 < x < x_1 & E_x = 0 \\ \text{pour} & x_1 < x < x_2 & E_x = -\dfrac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1} \\ \text{pour} & x_2 < x < x'_2 & E_x = 0 \end{array}}$$

Représentation graphique de $V(x)$ et de $E(x)$:



On remarque que le champ $\vec{E}$ est discontinu en $x = x_1$ et $x = x_2$.

Nature des trajectoires :

La force $\vec{F} = -e\vec{E}$ qui agit sur l'électron est opposée à $\vec{E}$:

pour $0 < x < x_1$ $F_x = 0$

pour $x_1 < x < x_2$ $F_x = e\dfrac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1}(> 0)$

pour $\quad x_2 < x < x'_2 \qquad F_x = 0$

Pour $\quad 0 < x < x_1 \quad$ et pour $\quad x_2 < x < x'_2$, le mouvement est rectiligne uniforme.

Pour $\quad x_1 < x < x_2 \quad$ on a :

$$\frac{F_x}{m} = \frac{e}{m}\,\frac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1} = a \quad \text{et} \quad F_y = 0$$

d'où
$$\begin{cases} \ddot{x} = a \\ \ddot{y} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x} = at + v_0 \cos i \\ \dot{y} = v_0 \sin i \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0 t \cos i \\ y = v_0 t \sin i \end{cases}$$

On en déduit :
$$x = \frac{1}{2}\, a\, \frac{y^2}{v_0^2 \sin^2 i} + y \tan i$$

Le mouvement est uniformément accéléré. La trajectoire est un arc de parabole.

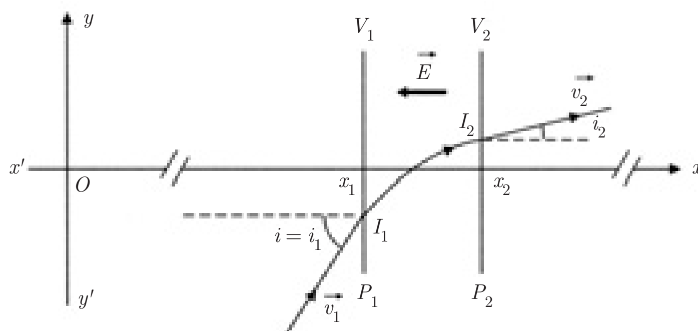
2) L'énergie mécanique de l'électron reste constante. À la source, elle est nulle ($\vec{v}_0 = \vec{0}$ et $V = 0$). On a donc :

$$0 = \frac{1}{2}\, m v^2 - eV \quad \text{et par suite :}$$

$$\boxed{v(M) = \sqrt{\frac{2eV(M)}{m}}}$$

3) Quel que soit un axe $y'Oy$ perpendiculaire à $x'Ox$ on a :

$$m\,\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = F_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad V_y = \text{cte}$$



En égalant les valeurs de V_y pour un point $x \in [0,x_1]$ et un point $x' \in [x_2,x_2']$ on obtient :

$$v_1 \sin i_1 = v_2 \sin i_2 \implies \sqrt{V_1} \sin i_1 = \sqrt{V_2} \sin i_2$$

En comparant avec la loi de Descartes en Optique :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

on en déduit la relation de correspondance entre l'indice de réfraction n et le potentiel V :

$$\boxed{n = \sqrt{V}}$$

Si les deux plans P_1 et P_2 sont suffisamment rapprochés pour que l'on puisse confondre I_1 et I_2, on voit que la trajectoire de l'électron subit une réfraction là où le potentiel change de valeur.

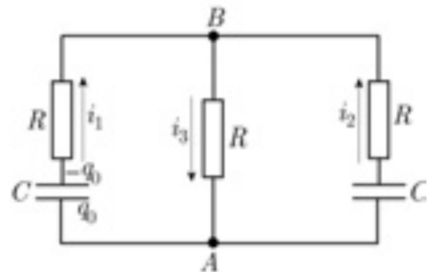
4) La relation $\sqrt{V_1} \sin i_1 = \sqrt{V_2} \sin i_2$ montre que si $V_2 > V_1$ alors $i_2 < i_1$, l'électron se rapproche de l'axe $x'Ox$. Un dispositif formé de deux grilles rapprochées et portées à des potentiels judicieusement choisis permettra de focaliser un faisceau d'électrons dans un microscope électronique.

Problème n° 6. Étude d'un réseau capacitif

1) La loi des nœuds en B donne la relation demandée :

$$\boxed{i_1 + i_2 = i_3} \qquad (1)$$

2) En considérant successivement les trois dipôles AB on peut écrire trois expressions de $V_A - V_B$, ce qui donne les deux relations suivantes :



$$-\frac{q_1}{C} + Ri_1 = -Ri_3 \qquad (2)$$

$$-\frac{q_2}{C} + Ri_2 = -Ri_3 \qquad (3)$$

À l'instant initial on a $q_1 = q_0$ et $q_2 = 0$; par conséquent :

$$-\frac{q_0}{C} + Ri_{10} = Ri_{20} = -Ri_{30} \qquad \text{soit :}$$

$$\begin{cases} i_{10} + i_{30} &= \dfrac{q_0}{RC} \\ i_{20} + i_{30} &= 0 \end{cases}$$

soit, en remplaçant i_{30} par $i_{10} + i_{20}$:

$$\begin{cases} 2i_{10} + i_{20} &= \dfrac{q_0}{RC} \\ i_{10} + 2i_{20} &= 0 \end{cases}$$

On en déduit successivement :

$$\boxed{i_{10} = \frac{2q_0}{3RC}} \qquad \boxed{i_{20} = -\frac{q_0}{3RC}} \qquad \boxed{i_{30} = \frac{q_0}{3RC}}$$

3) On a :

$$i_1 = -\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad i_2 = -\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}$$

On obtient de même d'après (2) et (3), puis (1) :

$$\left.\begin{aligned} i_1 + i_3 &= \frac{q_1}{RC} \\ i_2 + i_3 &= \frac{q_2}{RC} \end{aligned}\right\} \implies i_3 = \frac{q_2 + q_2}{3RC}$$

Par suite :

$$\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{-i_1 - i_2}{\tau}$$

soit, en tenant compte de (1) :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + \frac{i_3}{\tau} = 0}$$

4) L'intégration de cette équation donne :

$$i_3 = i_{30}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{soit :} \qquad \boxed{i_3 = \frac{q_0}{\tau}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$$

5) Dérivons (2) et substituons $-\mathrm{d}q_1/\mathrm{d}t = i_1$; il vient :

$$\frac{i_1}{RC} + \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t}$$

soit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{3i_1}{\tau} = \frac{q_0}{\tau^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$$

L'équation homogène correspondante admet la solution générale suivante :

$$i_{1\mathrm{h}} = A\,\mathrm{e}^{-\frac{3t}{\tau}}$$

Cherchons la solution particulière sous la forme $i_{1\mathrm{p}} = B\,e^{-\frac{t}{\tau}}$:

$$-\frac{B}{\tau} + \frac{3B}{\tau} = \frac{q_0}{\tau^2} \qquad \Longrightarrow \qquad B = \frac{q_0}{2\tau}$$

La solution générale $i_1(t)$ est donc :

$$\boxed{i_1 = A\,\mathrm{e}^{-\frac{3t}{\tau}} + \frac{q_0}{2\tau}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$$

6) On a:

$$i_{10} = \frac{2q_0}{\tau} = 1 + \frac{q_0}{2\tau} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{3q_0}{2\tau}$$

Il vient par conséquent, compte tenu de (1) et de l'expression obtenue pour $i_3(t)$:

$$\boxed{i_1 = \frac{q_0}{2\tau}\left(3\,\mathrm{e}^{-\frac{3t}{\tau}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \qquad \boxed{i_2 = \frac{q_0}{2\tau}\left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} - 3\,\mathrm{e}^{-\frac{3t}{\tau}}\right)}$$

Les trois intensités trouvées tendent bien sûr vers zéro quand $t \to \infty$.

$i_1(t)$ et $i_3(t)$ sont décroissants. Étudions le signe de la dérivée de $i_2(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{q_0}{2\tau^2}\left(-\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + 9\,\mathrm{e}^{-\frac{3t}{\tau}}\right)$$

Celle-ci change de signe pour :

$$\mathrm{e}^{\frac{2t}{\tau}} = 9$$

soit $\quad t = \dfrac{\tau \ln 9}{2} = \tau \ln 3 \simeq 1{,}10\,\tau$

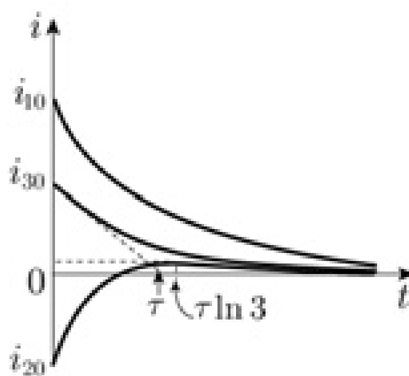


FIG. 2

Par ailleurs i_2 s'annule pour :

$$t = \frac{\tau}{2}\ln 3 \simeq 0{,}55\,\tau$$

i_2 passe par un maximum (figure 2).

7) Les admittances des trois dipôles AB s'ajoutent :

$$\frac{1}{\widetilde{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R + 1/jC\omega} + \frac{1}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{2}{1 + 1/jRC\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{R}\left(\frac{3 + 1/j\,RC\omega}{1 + 1/j\,RC\omega}\right)$$

soit enfin :

$$\boxed{\widetilde{Z} = R/\frac{1 + 1/j\,RC\omega}{3 + 1/j\,RC\omega}} \quad \text{et} \quad \boxed{Z = R\sqrt{\frac{1 + (RC\omega)^2}{1 + 9\,(RC\omega)^2}}}$$

Calculons la dérivée logarithmique de Z :

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{1}{2}\,\frac{2R^2C^2\omega}{1 + R^2C^2\omega^2} - \frac{1}{2}\,\frac{2 \times 9R^2C^2\omega}{1 + 9R^2C^2\omega^2}$$

$$= R^2C^2\omega\left(\frac{1}{1 + R^2C^2\omega^2} - \frac{1}{1/9 + R^2C^2\omega^2}\right)$$

Z' est donc négative sauf pour $\omega = 0$ où elle est nulle : Z est décroissante et $I = e_0/Z$ croît de e_0/R, pour $\omega = 0$, à $3e_0/R$, pour ω tendant vers l'infini.

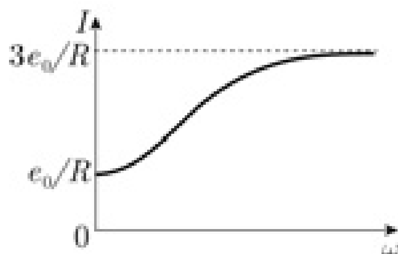


FIG. 3

Problème n° 7. Filtrage

1) On a, avec les notations de la figure 1 :

$$\widetilde{u}_1 = \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\widetilde{i}_1$$

$$\widetilde{u}_2 = \frac{1}{jC\omega}\widetilde{i}_1$$

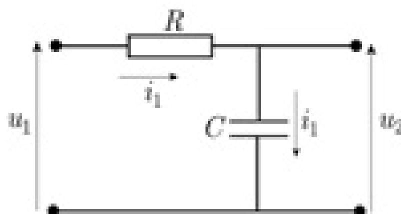


FIG. 1

la fonction de transfert est :

$$\frac{\widetilde{u}_2}{\widetilde{u}_1} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\left|\frac{\widetilde{u}_2}{\widetilde{u}_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\arg\frac{\widetilde{u}_2}{\widetilde{u}_1} = -\arctan(RC\omega)}$$

La phase de la fonction de transfert étant négative, il s'ensuit que la tension $\widetilde{u}_2$ est en retard sur $\widetilde{u}_1$.

2) 0n a :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad RC\omega_c = 1$$

soit :

$$\boxed{\omega_c = \frac{1}{RC}}$$

Application numérique :

$$R = \frac{1}{C\omega_c} = \frac{1}{2\pi f_c C} \qquad \text{soit} \qquad R = 1{,}6 \cdot 10^4\ \Omega$$

3) Désignons par $H(\omega)$ le module de la fonction de transfert et par $\varphi(\omega)$ son argument.
$H(\omega)$ est à l'évidence une fonction décroissante qui tend vers zéro quand ω tend vers l'infini. Calculons sa dérivée logarithmique :

$$\frac{H'(\omega)}{H(\omega)} = -\frac{1}{2}\frac{2R^2C^2\omega}{1+(RC\omega_c)^2}$$

Celle-ci s'annule pour $\omega = 0$ et le graphe présente une tangente parallèle à l'axe des abscisses en ce point.
La phase $\varphi(\omega) = -\arctan(RC\omega)$ décroît de zéro à $-\pi/2$ et passe par la valeur $-\pi/4$ quand $\omega = \omega_c$. Sa dérivée

$$\varphi'(\omega) = -\frac{RC}{1+(RC\omega)^2}$$

vaut $-RC$ à l'origine.

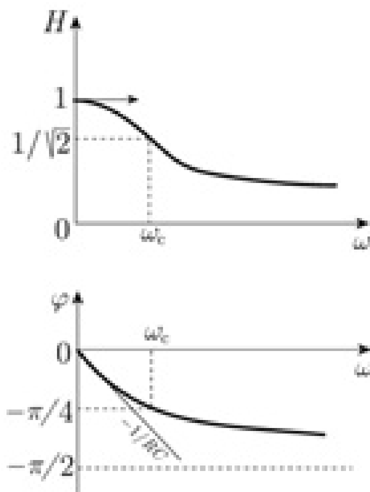


FIG. 2

4) L'amplitude de la tension de sortie est d'autant plus faible que la fréquence est élevée : il y a atténuation des hautes fréquences. Le système se comporte comme un filtre qui ne laisse passer que les basses fréquences (filtre « passe-bas »).

5) On a, pour les harmoniques $3\omega_c$, $5\omega_c$, $7\omega_c$:

$\varphi_3 = -\arctan 3 \simeq -1{,}2\ \text{rad}$ et

$$\frac{H(3\,\omega_c)}{H(\omega_c)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+(3RC\omega_c)^2}} = \sqrt{\frac{2}{1+3^2}} = 0{,}45$$

$\varphi_5 = -\arctan 5 \simeq -1{,}4\ \text{rad}$ et

$$\frac{H(5\,\omega_c)}{H(\omega_c)} = \sqrt{\frac{2}{1+5^2}} = \sqrt{\frac{2}{26}} = 0{,}28$$

$\varphi_7 = -\arctan 7 \simeq -\pi/2\ \text{rad}$

$$\frac{H(7\,\omega_c)}{H(\omega_c)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+7^2}} = \sqrt{\frac{2}{50}} = 0{,}20$$

Les phases des harmoniques s'écartent de la phase du fondamental et tendent assez rapidement vers $\pi/2$.
De plus les harmoniques sont atténués dans le signal de sortie : les amplitudes des trois premiers sont respectivement 45 %, 28 % et 20 % de celle du fondamental ; le signal en créneau va donc être déformé et se rapprocher d'un signal sinusoïdal de pulsation ω_{c}.

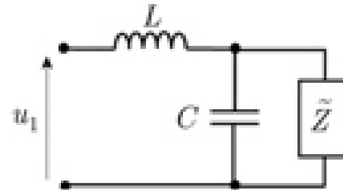


FIG. 3

6) On doit avoir :

$$\tilde{Z} = jL\omega + \frac{1}{1/\tilde{Z} + jC\omega} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\tilde{Z} - jL\omega} = \frac{1}{\tilde{Z}} + jC\omega$$

ou encore, en retranchant $1/\tilde{Z}$ aux deux membres :

$$\frac{jL\omega}{\tilde{Z}^2 - jL\omega\tilde{Z}} = jC\omega$$

Par conséquent, $\tilde{Z}$ est solution de l'équation suivante :

$$\tilde{Z}^2 - jL\omega\,\tilde{Z} - \frac{L}{C} = 0$$

La forme des solutions de cette équation dépend du signe du discriminant :

$$\Delta = \frac{4L}{C} - L^2\omega^2 = L^2\left(\omega_{\mathrm{c}}^2 - \omega^2\right)$$

en posant :

$$\boxed{\omega_{\mathrm{c}} = \frac{2}{\sqrt{LC}}}$$

S'il est positif, c'est-à-dire si $\omega < \omega_{\mathrm{c}}$, on a :

$$\boxed{\tilde{Z} = \frac{jL\omega}{2} \pm \frac{L}{2}\sqrt{\omega_{\mathrm{c}}^2 - \omega^2}}$$

S'il est négatif ($\omega_{\mathrm{c}} < \omega$) les solutions sont imaginaires pures :

$$\boxed{\tilde{Z} = j\frac{L\omega}{2} \pm j\,\frac{L}{2}\sqrt{\omega^2 - \omega_{\mathrm{c}}^2}}$$

$A.N.$ $L = 4/w_c^2 C = 4/4\pi^2(2{,}4.10^3)^2 2 \cdot 10^{-6}\mathrm{H}$, soit $L = 8{,}8\,\mathrm{mH}$.

7) On a (cf. figure 4) :

$$\widetilde{u}_{n-1} - \widetilde{u}_n = jL\omega\,\widetilde{i}_{n-1}$$
$$\widetilde{u}_{n-1} = \widetilde{Z}\,\widetilde{i}_{n-1}$$

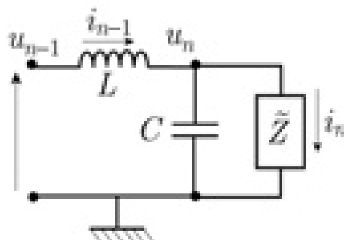


FIG. 4

Par conséquent, en faisant le rapport membre à membre :

$$1 - \frac{\widetilde{u}_n}{\widetilde{u}_{n-1}} = \frac{jL\omega}{\widetilde{Z}} \qquad \text{soit :}$$

$$\boxed{\frac{\widetilde{u}_n}{\widetilde{u}_{n-1}} = \frac{\widetilde{Z} - jL\omega}{\widetilde{Z}}}$$

Ce résultat pouvait être également obtenu avec le théorème de Millmann :

$$\widetilde{u}_n = \frac{\widetilde{u}_{n-1}/jL\omega}{1/jL\omega + 1/\widetilde{Z} + jC\omega} = \frac{\widetilde{u}_{n-1}/jL\omega}{1/jL\omega + 1/(\widetilde{Z} - jL\omega)}$$

en remplaçant l'expression de $1/\widetilde{Z} + jC\omega$ (*cf.* début de la question *6)*). En multipliant le numérateur et le dénominateur par $jL\omega\left(\widetilde{Z} - jL\omega\right)$ on retrouve l'expression précédente.

8) Si $\omega < \omega_\mathrm{c}$ on a alors, en utilisant le résultat de *6)* :

$$\widetilde{Z} - jL\omega = -j\frac{L\omega}{2} \pm \frac{L}{2}\sqrt{\omega_\mathrm{c}^2 - \omega^2} = \widetilde{Z}^*$$

$$\text{et par conséquent} \quad \frac{\widetilde{u}_n}{\widetilde{u}_{n-1}} = \frac{\widetilde{Z}^*}{\widetilde{Z}} \quad \text{est de module 1.}$$

Ainsi, du fait que $U_n/U_{n-1} = 1$ pour tout *n*, on a aussi :

$$\boxed{\frac{U_n}{U_0} = 1}$$

Le transfert de la tension d'entrée à la sortie de l'élément *n* se fait donc sans atténuation ; il y a seulement déphasage de la tension u_n sur la tension d'entrée u_0.

9) Si maintenant $\omega > \omega_c$, on a, toujours en utilisant le résultat de *6)* :

$$\widetilde{Z} - jL\omega = -j\left(\frac{L\omega}{2} \pm \frac{L}{2}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}\right) \quad \text{et, par suite :}$$

$$\frac{\widetilde{u}_n}{\widetilde{u}_{n-1}} = \frac{-L\omega/2 \pm (L/2)\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{L\omega/2 \pm (L/2)\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} = \frac{\pm\sqrt{1 - \dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}} - 1}{\pm(L/2)\sqrt{1 - \dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}} + 1}$$

Le signe $-$ devant le radical implique $U_n/U_{n-1} > 1$, tandis que le signe $+$ correspond à $U_n/U_{n-1} < 1$. La première possibilité, qui signifie que le potentiel U_n croît avec *n*, nécessite un apport d'énergie qui ne peut avoir lieu avec des éléments passifs, tels que des résistances, inductances ou capacités ; elle ne peut donc être retenue.
La deuxième solution donne :

$$\frac{U_n}{U_0} = \left(\frac{U_n}{U_{n-1}}\right)\left(\frac{U_{n-1)}}{U_{n-2}}\right)\left(\frac{U_{n-2}}{U_{n-3}}\right)\cdots\left(\frac{U_1}{U_0}\right) \quad \text{soit :}$$

$$\boxed{\frac{U_n}{U_0} = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{\omega_c^2}{\omega^2}}}\right)^n}$$

A.N. On a :

$$\frac{\omega_c}{\omega} = \frac{f_c}{f} = \frac{2{,}4}{3} = 0{,}8 \quad \text{d'où} \quad \frac{U_n}{U_0} = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 0{,}64}}{1 + \sqrt{1 - 0{,}64}}\right)^n = \left(\frac{1 - 0{,}6}{1 + 0{,}6}\right)^n$$

Soit donc :

$$\frac{U_n}{U_0} = \frac{1}{4^n} \quad \text{d'où} \quad \frac{U_1}{U_0} = 0{,}25 \quad \text{et} \quad \frac{U_5}{U_0} = \frac{1}{2^{10}} = 10^{-3}.$$

10) Graphe de U_n/U_0 en fonction de ω :

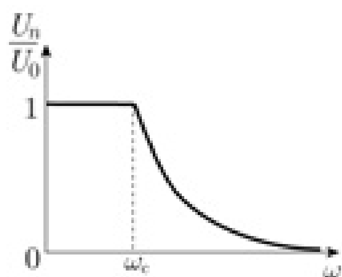


FIG. 5

Index

L

M

P

R

S

T

V

050249 - (I) - (1,5) - OSB 80° - LAS - CHD

Achevé d'imprimer sur les presses de
SNEL Grafics sa
Z. I. des Hauts Sarts - Zone 3
Rue Fond des Fourches 21 – B-4041 Vottem (Herstal)
Tél +32 (0)4 344 65 60 - Fax +32 (0)4 286 99 61
août 2006 – 37934

Dépôt légal : septembre 2006
Dépôt légal de la 1re édition : 2002

Imprimé en Belgique

ÉMILE AMZALLAG - JOSEPH CIPRIANI - JOCELYNE BEN AÏM - NORBERT PICCIOLI

100% LICENCE

100% BTS/DUT

100% CONCOURS

LA PHYSIQUE EN FAC
Électrostatique et Électrocinétique
Cours et exercices corrigés

Ce cours en sept volumes (*Électrostatique et électrocinétique, Ondes électromagnétiques et milieux, Magnétostatique et induction, Mécanique, Ondes mécaniques et mécanique des fluides, Optique, Thermodynamique*) est destiné aux étudiants des premières années de licence scientifique.

Ce manuel couvre les notions d'électrostatique et d'électrocinétique abordées lors des premières années de licence. Chaque chapitre débute par des rappels mettant l'accent sur les points fondamentaux du cours, illustrés d'exemples classiques et d'exercices d'application. Ces rappels sont suivis d'exercices de difficulté croissante accompagnés de leur solution détaillée. Le dernier chapitre propose une dizaine de problèmes d'examen corrigés.

Cet ouvrage complet est le meilleur garant de réussite aux examens et concours.

Émile Amzallag, Joseph Cipriani, Jocelyne Ben Aïm, et Norbert Piccioli sont maîtres de conférences à l'université Paris 6.



ISBN 2 10 050249 2

www.ediscience.net

EdiScience